

INSTITUT FÜR BAUSTOFFKUNDE UND STAHLBETONBAU
DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BRAUNSCHWEIG

Amtliche Materialprüfstelle für das Bauwesen
Prof. Dr. - Ing. K. Kordina - Prof. Dr. - Ing. G. Rehm

**BEITRAG ZUR FRAGE
DER KIPPSTABILITÄT AUFGEHÄNGTER TRÄGER**

von

KAMAL RAFLA

Stadtbibliothek
Technischen Universität
Braunschweig

Fa

559
(10)

BRAUNSCHWEIG • FEBRUAR 1968

Fa-559 (10)

INSTITUT FÜR BAUSTOFFKUNDE UND STAHLBETONBAU
DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BRAUNSCHWEIG

Amtliche Materialprüfstelle für das Bauwesen
Prof. Dr. - Ing. K. Kordina - Prof. Dr. - Ing. G. Rehm

BEITRAG ZUR FRAGE DER KIPPSTABILITÄT AUFGEHÄNGTER TRÄGER

von

KAMAL RAFLA



10.6051

HEFT 10 • BRAUNSCHWEIG • FEBRUAR 1968

V o r w o r t =====

Die vorliegende Arbeit entstand im Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau der Technischen Hochschule Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig in den Jahren 1964 und 1965.

Die Anregung dazu verdanke ich dem Direktor dieses Institutes, Herrn Professor Dr.-Ing. K. Kordina. Für die wertvollen Hinweise und die grosszügige Unterstützung möchte ich ihm an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aussprechen.

Herrn Professor Dr.-Ing. R. Barbré bin ich für die Übernahme des Korreferats und die Unterstützung bei der endgültigen Fassung der Arbeit sehr dankbar.

Mein Dank gilt auch den Mitarbeitern des Instituts, die mir bei der Anfertigung der Versuchsmodelle und bei der Durchführung der Versuche behilflich waren.

Braunschweig, im Februar 1968

Der Verfasser

Inhaltsverzeichnis
=====

	<u>Seite</u>
1. Einführung und Problemstellung	1
2. Grundgleichungen des Kipp-Problems	3
2.1 Voraussetzungen	3
2.2 Differentialgleichungen des Kipp-Problems	8
2.3 Energiemethode zur Lösung des Kipp-Problems	9
2.31 Ableitung des energetischen Indifferenzkriteriums für aufgehängte Balkenträger	10
2.32 Ableitung des energetischen Indifferenzkriteriums für aufgehängte flächenartige Träger ($EI_y = \infty$)	15
3. Aufgehängte Träger ohne Endscheiben an den Stirnflächen ($\beta = \beta_0 = 1$)	19
3.1 Gleichmässig verteilte Querlast	19
3.11 Allgemeiner Fall	19
3.12 Sonderfall ($EI_y = \infty$)	27
3.13 Genauigkeitsbetrachtungen	31
3.14 Untersuchung der Gültigkeit der Annahme $EI_y = \infty$	33
3.15 Einfluss der Aufhängehöhe auf die Kipplast	40
3.2 Gleichmässig verteilte Querlast und Angriff einer exzentrischen Normalkraft	46
3.21 Allgemeiner Fall	46
3.22 Sonderfall ($EI_y = \infty$)	49
3.23 DUNKERLY'sche Formel	51
4. Aufgehängte Träger mit Endscheiben an den Stirnflächen ($\beta = 1, \beta_0 = 0,5$)	53
4.1 Gleichmässig verteilte Querlast	53
4.11 Ableitung der Kippgleichungen	53

	<u>Seite</u>
4.12 Genauigkeitsbetrachtungen	61
4.2 Gleichmässig verteilte Querlast und Angriff einer exzentrischen Normalkraft	66
5. Aufgehängte Träger mit Endscheiben an den Stirnflächen ($\beta = \beta_0 = 0,5$)	67
5.1 Allgemeiner Fall	67
5.2 Sonderfall ($EI_y = \infty$)	68
5.3 Genauigkeitsbetrachtungen	70
5.4 Einfluss der Endscheiben auf die Kipplast	71
6. Zusammenstellung der für den praktischen Gebrauch geeigneten Formeln	73
7. Anwendung der gewonnenen Lösungen auf baupraktische Konstruktionen	74
7.1 Konstruktionen aus Stahl	74
7.2 Konstruktionen aus Stahlbeton	76
7.21 Übersicht	76
7.22 Rechnungsgrundlagen	78
7.221 Spannungsverteilung in der Biegedruckzone	78
7.222 Spannungs-Dehnungs-Linien der Betonstäbe	89
7.23 Rechengrössen	89
7.231 Seitliche Biegesteifigkeit (EI_y)	89
7.232 Torsionssteifigkeit (GI_t)	94
7.233 Steifigkeitsverlauf längs der Balkenachse	101
7.234 Lage des Schubmittelpunktes	105
7.235 r_x -Grösse	106
7.236 e- und f-Grössen	107
7.24 Sicherheitsbetrachtungen	107
7.25 Rechengang	108
7.26 Näherungsverfahren	111
7.261 Verfahren von Pettersson	111
7.262 Verfahren von Hansell und Winter	111

	<u>Seite</u>
7.263 Verfahren von Siev	112
7.264 Verfahren von Lebelle	113
7.265 Kritische Betrachtungen zu den Näherungs- verfahren	113
8. Experimentelle Untersuchungen	115
8.1 Vorwort	115
8.2 Beschreibung der Versuchs- und Belastungs- einrichtungen	116
8.3 Versuchsdurchführung	123
8.4 Versuchsergebnisse	124
8.5 Auswertung der Versuche	127
8.51 Querschnittswerte des Versuchsträgers	127
8.52 Theoretische Kipplast	128
8.6 Deutung der Versuche	129
9. Zusammenfassung	131
10. Schrifttumverzeichnis	134
<u>A n h a n g</u>	
Anwendungsbeispiele	138

Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen

l	Trägerlänge	(cm)
F	konstante Trägerquerschnittsfläche	(cm ²)
$I_x ; I_y$	die auf die Hauptachsen x, y bezogenen Trägheitsmomente des Trägerquerschnittes	(cm ⁴)
$i_p = \sqrt{\frac{I_x + I_y}{F}}$	der polare, auf den Querschnittsschwerpunkt S bezogene Trägheitsradius des Trägerquerschnittes	(cm)
$r_x = \frac{1}{I_x} \int_F y(x^2 + y^2) dF$	Querschnittsfestwert	(cm)
y_M	der in Richtung der y -Achse positiv gezählte Abstand des Schubmittelpunktes M vom Schwerpunkt S	(cm)
I_t	der Saint-Venant'sche Torsionswiderstand des Trägerquerschnittes	(cm ⁴)
C_M	der auf den Schubmittelpunkt M bezogene Wölbwiderstand des Trägerquerschnittes	(cm ⁶)
$E ; G$	der Elastizitäts- bzw. Schubmodul des Trägerwerkstoffes	(Kp/cm ²)
EI_y	die seitliche Biegesteifigkeit	(Kp.cm ²)
GI_t	die Torsionssteifigkeit	(Kp.cm ²)
EC_M	die Wölbsteifigkeit bezüglich des Schubmittelpunktes M	(Kp.cm ⁴)
e	der in Richtung der positiven y -Achse positiv gezählte Abstand des Lastangriffspunktes vom Schwerpunkt	(cm)
a	die in Richtung der positiven y -Achse positiv gezählte Exzentrizität der Normalkraft von der Trägerschwerachse	(cm)
f	die in Richtung der positiven y -Achse positiv gezählte Höhe des Aufhängepunktes über der Querlastangriffslinie	(cm)
$\bar{a} = -a$	die in Richtung der negativen y -Achse positiv gezählte Ausmittigkeit der Normalkraft von der Schwerachse (bei flächenartigen Trägern)	(cm)

\bar{d}	die in Richtung der negativen y-Achse positiv gezählte Höhe des Lastangriffspunktes über dem Schubmittelpunkt (bei flächenartigen Trägern)	(cm)
$\bar{f} = -f$	die in Richtung der negativen y-Achse positiv gezählte Höhe des Aufhängepunktes über der Querlastangriffslinie (bei flächenartigen Trägern)	(cm)
$p_k; \bar{p}_k = -p_k$	die Intensität der kritischen, gleichmässig verteilten Querlast (\bar{p}_k bei flächenartigen Trägern)	(Kp/cm)
$P_k; \bar{P}_k$	die kritische Normalkraft (P_k bzw. \bar{P}_k als Druckkraft ist positiv einzusetzen)	(Kp)
$M_{x,k}, \bar{M}_{x,k}$	das unter der kritischen Belastung auftretende, auf die Querschnittsachse x bezogene Biegemoment (Kp . cm) als Funktion von z.	
ψ_k	ideale Kippsicherheitszahl	

Alle übrigen Grössen, die in der nachfolgenden Arbeit ausserdem vorkommen, werden bei der Einführung erläutert.

1. Einleitung und Problemstellung

Der Beurteilung der Stabilität von Baukonstruktionen kommt auch im Massivbau immer grössere Bedeutung zu. Die Entwicklung des Spannbeton- und Fertigteilbaues trägt dazu bei, dass unter optimaler Baustoffausnutzung noch schlankere Bauteile ausgeführt werden. Während bei traditionellen Ortbetonkonstruktionen ausser einfachen Knickproblemen kaum Fragen der Stabilität auftreten, ist dies bei Fertigteilkonstruktionen durchaus der Fall. Als Beispiel sei das Kippen hoher Profilträger als Dachbinder erwähnt.

Besondere Aufmerksamkeit ist der Beurteilung der Sicherheit gegen Auskippen der Träger im Montagezustand zu widmen. Im Montagezustand ist die Bedingung der starren Torsionseinspannung an den Balkenenden (Randbedingung für den Fall Gabel Lagerung) meist nicht erfüllt. Daher sind die aufgehängten Träger auf Kippen mehr gefährdet als die gabelgelagerten.

Unter der Annahme vollständig elastischen Materials wurden von zahlreichen Forschern für die üblichen Lagerungsarten (Gabel Lagerung mit oder ohne Endscheiben und Einspannung) Formeln angegeben, die eine Beurteilung der Kippsicherheit ermöglichen. Hierzu vergleiche man [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] und [8].

Im letzten Jahrzehnt wurden zur Beurteilung der Kippstabilität von Balken im Montagezustand einige Lösungen veröffentlicht, die strenggenommen nur für aufgehängte Balken mit Rechteckquerschnitt Geltung haben. Eine für einen beliebig geformten Querschnitt allgemeingültige Lösung liegt nicht vor.

CSONKA [9] ermittelte die Kipplast eines an einem Punkt aufgehängten geraden Trägers. In einer anderen Veröffentlichung [10] untersuchte er das Kipp-Problem eines an seinen Enden aufgehängten Balkens. Das Kippen des in zwei symmetrischen, sonst aber beliebigen Punkten aufgehängten geraden Stabes wurde von BOLCSKEI [11] behandelt. Später untersuchte LEBELLE [12] dasselbe Problem. MÜLLER veröffentlichte in [13] die Arbeit von LEBELLE in einer zusammengefassten Form. PETTERSSON [14] untersuchte den Einfluss der Aufhängung auf die Kipplast gerader

Balken mit rechteckigen Querschnitten; er führte durch Abminderungskoeffizienten die kritische Last eines aufgehängten Balkens relativ einfach auf den Fall des gabelgelagerten Balkens zurück. LEBELLE und PETERSSON versuchten ebenfalls durch Faktoren den Einfluss der Querschnittsform auf die Kipp- last zu berücksichtigen. Diese Beiwerte dürfen jedoch nur für I-Balken angewendet werden.

In keiner der erwähnten Abhandlungen ist der ungünstige Einfluss einer axialen Druckkraft auf die kritische Last eines aufgehängten Trägers behandelt.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, allgemeine Lösungen zur Ermittlung der Kipplast der an ihren Enden aufgehängten, geraden Träger mit beliebig geformten, einfach symmetrischen, dünnwandigen, offenen Querschnitten aufzuzeigen. Als Belastung wird gleichmässig verteilte Streckenlast mit gleichzeitiger Wirkung einer exzentrischen Normalkraft angenommen.

Der Einfluss von starren Endscheiben an den Stirnflächen des Trägers auf die Kipplast wird ebenfalls untersucht, und die entsprechenden Lösungen werden abgeleitet.

Anschliessend wird die Übertragung der gewonnenen, theoretischen Ergebnisse auf baupraktische Konstruktionen aus Stahl und Stahlbeton gezeigt.

Zur Überprüfung der abgeleiteten Lösungen werden mehrere Modellversuche mit aufgehängten Trägern durchgeführt. Als Werkstoff wird Aluminium verwendet. Die Versuchsergebnisse werden ebenfalls mitgeteilt und mit den theoretischen Werten verglichen.

Im Anhang wird an Hand von Zahlenbeispielen die Anwendungsweise der verschiedenen Kippgleichungen erläutert.

2. Grundgleichungen des Kipp-Problems

2.1 Voraussetzungen

Gegenstand dieser Untersuchung ist ein gerader Träger mit gleichbleibendem einfach-symmetrischem, dünnwandigem, offenem Querschnitt (Bild 1). Es wird vorausgesetzt, dass der Werkstoff dem HOOKE'schen Elastizitätsgesetz folgt, die Verformungen des Trägers sehr klein sind und die Querschnittsfigur des Trägers bei diesen Verformungen unverändert erhalten bleibt.

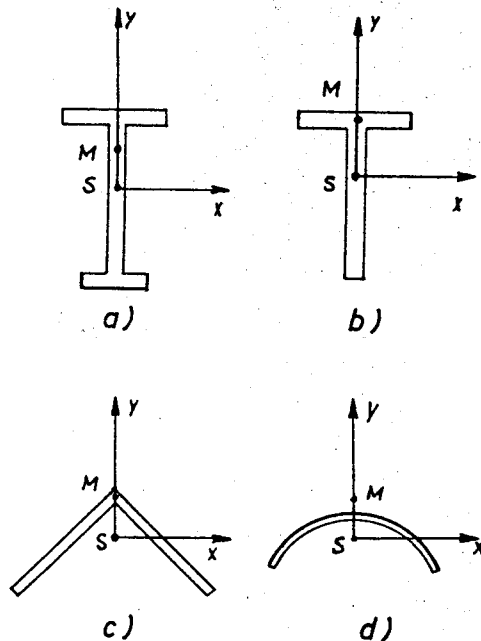
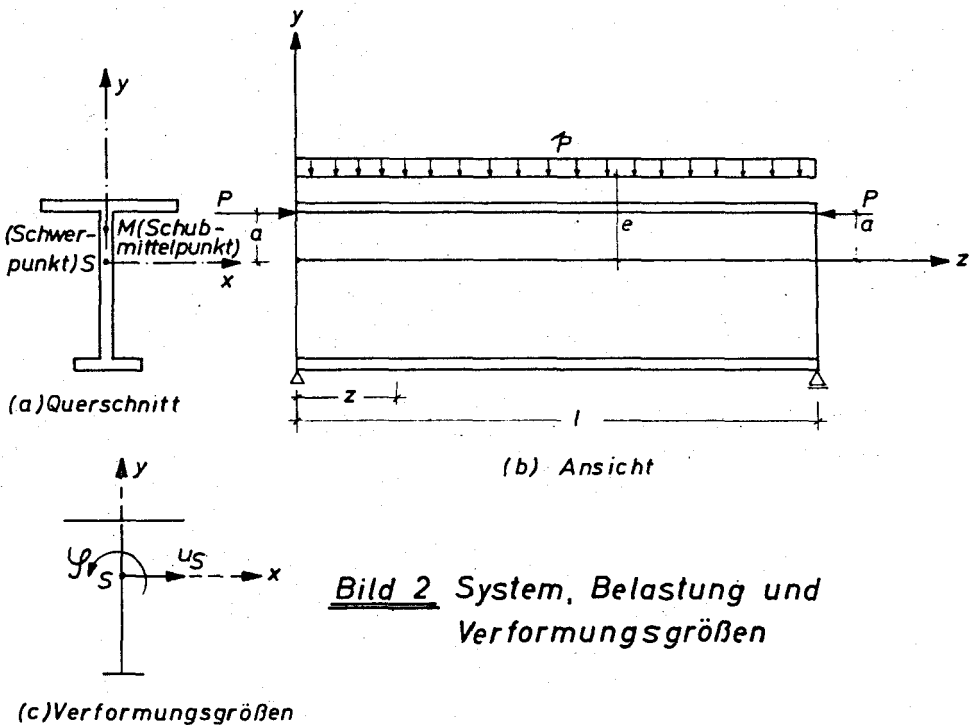


Bild 1: Querschnittsformen

Es wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z verwendet, dessen z -Achse mit der Trägerachse und dessen y -Achse mit der Symmetrieachse des Trägerquerschnittes zusammenfallen. Die Belastung ist durch Querlasten mit oder ohne exzentrische

Axialkräfte vorgegeben. Alle Lasten sind in der Symmetrie-Ebene des Trägers wirksam und erzeugen in dieser Ebene eine Verformung der Trägerachse, von der vorausgesetzt wird, dass sie klein bleibt und vernachlässigt werden darf.

Der positiv gewählte Wirkungssinn der Lasten ist in Bild 2 dargestellt. Die Grössen e und a werden in Richtung der positiven y -Achse positiv gemessen.



Die Querlasten behalten ihre Wirkungsrichtung während des Ausweichens bei, dagegen verschieben sich die Angriffspunkte mit den Querschnitten. Andererseits sollen alle Lasten verhältnismäßig anwachsen bis zum Eintritt des Kippens. Bezeichnet man die ν_k -fache Last als die Kipplast, so bedeutet

V_k die Kippsicherheit. Es besteht also bei der V_k -fachen Last ein indifferentes Gleichgewicht.

Es wird vorausgesetzt, dass die Querschnittsfigur des Trägers beim Ausweichen unverändert erhalten bleibt, so dass die den Beginn des Ausweichens kennzeichnende Verformung durch die unendlich kleine Verschiebung u_g des Querschnittsschwerpunktes in Richtung der x-Achse und durch die unendlich kleine Verdrehung der Querschnittsfigur in ihrer Ebene festgelegt werden kann. Die positiven Werte von u_g und φ sind in Bild 2c angegeben.

Die Aufhängung des Trägers kann in verschiedenen Arten erfolgen. Die üblichen Aufhängemethoden sind in Bild 3 schematisch dargestellt. Bei der ersten Aufhängeart (Bild 3 a) wird der Träger an seinen Enden in 2 Punkten derart aufgehängt, dass die Aufhängeseile an jedem Rand in einer vertikalen Ebene liegen. In diesem Fall unterliegt der Träger nur der Wirkung der vorhandenen Querbelastrungen. Führen hingegen die Aufhängeseile zu einem über der Trägermitte ($z = \frac{1}{2}$) liegenden Punkt (Bild 3b), so wird der Träger wegen der Schräglage der Aufhängeseile zusätzlich durch eine eventuell exzentrische Längskraft beansprucht, die leicht aus der Kräftezerlegung in der y-z-Ebene bestimmt werden kann. In den nachfolgenden Untersuchungen wird die Aufhängevorrichtung als starr vorausgesetzt. In Wirklichkeit wird die Verbindung des Trägers mit dem Drehpunkt der Aufhängung - dies ist meist der Kranhaken - durch die mehr oder minder elastische Aufhängevorrichtung hergestellt. Der Einfluss der Elastizität der Aufhängevorrichtung auf die Kippstabilität der aufgehängten Träger ist bereits von LEBELLE [12] und KLANG [15] behandelt worden. Der letztere zieht die Schlussfolgerung, dass die Elastizität der Hängeseile bei einer Trägeraufhängung nach Bild 3 a und 3 b für die Praxis meist vernachlässigbar klein ist, solange die Winkel α und $\beta \geq 30^\circ$ gewählt werden.

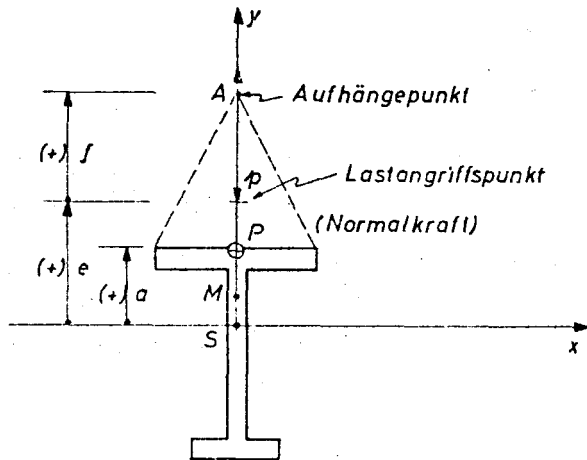


Bild 3c Querschnitt

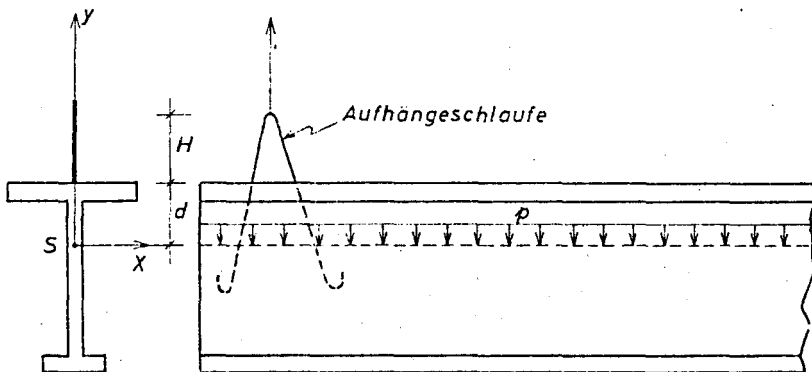


Bild 3d Aufhängung mittels Schlaufen

$[d < f < (d+H)]$; f = theor. Aufhängenhöhe

Die Höhenlage der Aufhängepunkte über den Lastangriffspunkten wird durch den Abstand f festgelegt, wobei f in Richtung der positiven y -Achse positiv gezählt wird (Bild 3c).

Eine dritte Aufhängemöglichkeit kommt bei der Verlegung von Fertigbauteilen im Industrie- und Hochbau in Frage, wobei die Träger an 2 Rundstahlschlaufen angehoben werden (Bild 3d). In diesem Fall muss man die Elastizität der Aufhängeschlaufen berücksichtigen. Dieses Problem ist ebenfalls von KLANG [15] untersucht worden. Durch Einführung einer reduzierten Aufhängehöhe kann die Kippstabilität beurteilt werden, wie bei der üblichen Annahme einer starren Aufhängevorrichtung (Vergl. [15]).

2.2 Differentialgleichungen des Kipp-Problems

Mit den im Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen festgelegten Bezeichnungen lauten die D.Gln. des Kipp-Problems [1], [6]

$$-EC_H \varphi'''' + GJ_T \varphi'' - \nu_{ki} P i_p^2 \varphi'' - \nu_{ki} \Gamma_x (M_x \varphi')' + EJ_Y \chi_M u_3'''' - EJ_Y \chi_M^2 \varphi'''' + \nu_{ki} M_x u_3'' + \nu_{ki} p c \varphi = 0 \quad , \quad (1)$$

$$+ EJ_Y u_3'''' - EJ_Y \chi_M \varphi'''' - \nu_{ki} (M_x \varphi)'' + \nu_{ki} P u_3'' = 0 \quad , \quad (2)$$

wobei die Striche Ableitungen nach z bedeuten.

Die allgemeine Lösung der gekoppelten D.-Gln. vierter Ordnung (1) und (2) enthält acht Integrationskonstanten. An jeder der beiden Grenzen $z = 0$ und $z = 1$ des Integrationsbereiches stehen vier Randbedingungen zur Verfügung. Die vier Randbedingungen, die an jedem der beiden Trägerenden vorzuschreiben sind, besitzen folgende Formen [6]: (zur Kennzeichnung der Randwerte wird der Zeiger r eingeführt)

a) Vorgeschrieben wird eine bestimmte Querverschiebung $u_{3,r}$ des Querschnitt-Schwerpunktes als geometrische Randbedingung oder aber - wenn der Schwerpunkt seitlich frei verschiebbar ist - die dynamische Randbedingung

$$EJ_Y u_{3,r}'''' - EJ_Y \chi_M \varphi_r'''' + \nu_{ki} P u_{3,r}'' - \nu_{ki} (M_x \varphi)_r' = 0 \quad . \quad (3)$$

- b) Vorgeschrieben wird eine bestimmte Querneigung $u'_{s,r}$ der Endtangente der Trägerachse als geometrische Randbedingung oder aber - wenn die Endtangente seitlich verdrehbar ist - die dynamische Randbedingung

$$EJ_y u''_{s,r} - EJ_y \chi_M \varphi'' - \nu_k M_{x,r} \varphi_r = 0 \quad (4)$$

- c) Vorgeschrieben wird ein bestimmter Drillwinkel φ_r der Querschnittsfigur als geometrische Randbedingung oder aber - wenn die Querschnittsfigur in ihrer Ebene frei verdrehbar ist - die dynamische Randbedingung

$$EC_M \varphi_r''' + EJ_y \chi_M^2 \varphi_r''' - EJ_y \chi_M u'''_{s,r} + \nu_k r_x M_{x,r} \varphi_r' + \nu_k P i_p^2 \varphi_r' - GJ_t \varphi_r' = 0 \quad (5)$$

- d) Vorgeschrieben wird ein bestimmtes Verwölbungsmass φ_r' des Trägerquerschnittes als geometrische Randbedingung oder aber - wenn die Querschnittsebene frei verwölbbar ist - die dynamische Randbedingung

$$EC_M \varphi_r'' + EJ_y \chi_M^2 \varphi_r'' - EJ_y \chi_M u''_{s,r} = 0 \quad (6)$$

Da sich die direkte Integration der D.Gln. des Kipp-Problems nur in einfachen Fällen durchführen lässt, bedient man sich bei den allgemeinen Aufgaben besser der Energiemethode.

2.3 Energiemethode zur Lösung des Kipp-Problems

Die potentielle Energie der am belasteten Träger wirksamen inneren und äusseren Kräfte ändert sich an der Stabilitätsgrenze beim Übergang von der geraden Gleichgewichtslage zur benachbarten deformierten Lage um den Betrag $\Delta \Pi$, der nach Zusammenfassung der linearen und der quadratischen Anteile in der Form

$$\Delta \Pi = \delta \Pi + \delta^2 \Pi \quad (7)$$

dargestellt werden kann.

Der quadratische Anteil $\delta^2 \Pi$, der für die Stabilitätsprüfung der geraden Lage von Bedeutung ist, setzt sich aus den

Summanden A^* , A^{**} , A^{***} zusammen, wobei A^* die Formänderungsarbeit der unendlich kleinen, beim Übergang von der geraden Lage zur deformierten Lage von Null anwachsenden Zusatzspannungen, A^{**} die Formänderungsarbeit der in der geraden Lage schon in voller Grösse vorhandenen, beim Übergang zur deformierten Lage nicht mehr geänderten Grundspannungen und A^{***} den Verlust an Arbeitsvermögen der äusseren Kräfte bedeuten. Da nicht nur die gerade Lage, sondern auch die deformierte Lage eine Gleichgewichtslage ist, muss die erste Variation der potentiellen Energie sowohl für die gerade als auch für die deformierte Lage verschwinden. Das energetische Indifferenzkriterium fordert demnach die Erfüllung der Gleichung

$$\delta(\delta^2 \Pi) = 0 \quad (8) \quad \text{für alle zulässigen Variationen.}$$

2.31 Ableitung des energetischen Indifferenzkriteriums für aufgehängte Balkenträger

Die Formänderungsarbeit der Zusatzspannungen unter Vernachlässigung der Biegeschubspannung und der sekundären Wölbschubspannung beträgt nach [1]

$$A^* = \frac{1}{2} \int_0^L [(EC_M + EJ_Y \chi_M^2) \varphi''^2 + EJ_Y u_S''^2 - 2 EJ_Y \chi_M u_S'' \varphi'' + GJ_t \varphi'^2] dz \quad (9)$$

Da die Verformung der Querschnitte beim Kippvorgang als eine Verschiebung und nachfolgende Verdrehung um den Schwerpunkt aufgefasst wird, beträgt die Dehnung eines Faserelementes nach [1]

$$\varepsilon = u_S'' \varphi \gamma + \frac{1}{2} u_S'^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 \varphi'^2 + \frac{1}{2} x^2 \varphi'^2 \quad (10) \quad S. 326, 5$$

Für die Formänderungsarbeit des Grundspannungszustandes

$$A^{**} = - \int_0^L \int_F \sigma \varepsilon dF dz$$

erhält man mit $\sigma = \frac{R}{F} + \frac{M_{x,k}}{J_x} \gamma$

$$A^{**} = - \frac{1}{2} \int_0^L [P_k u_S'^2 + P_k i_p^2 \varphi'^2 + 2 M_{x,k} u_S'' \varphi + M_{x,k} r_x \varphi'^2] dz \quad (11)$$

Der Verlust an Arbeitsvermögen der äusseren Kräfte A^{***} wird unter Zuhilfenahme geometrischer Vorstellungen wie folgt entwickelt (Bild 4).

Den Übergang von der geraden Lage I zu der deformierten Lage II denke man sich in zwei Schritten durchgeführt. Beim ersten Schritt wird der Träger gemäss der Funktion $u_s = u_s(z)$ seitlich ausgebogen und beim zweiten Schritt wird er gemäss der Funktion $\varphi = \varphi(z)$ verdrillt. Bei diesem Ausweichvorgang erfahren die Lastangriffspunkte Querverschiebungen $u_p(z)$, die sich durch die Beziehung

$$u_p(z) = u_s(z) - e \varphi(z)$$

beschreiben lassen. Die auf dem Grundriss projizierte Lastangriffslinie nimmt bei Lage II einen gekrümmten Verlauf an (Bild 4 b). Die Resultierende aller Lastelemente $p_k dz$ bei Lage II liegt offensichtlich ausserhalb der Symmetrie-Ebene $y-z$, nämlich im Schwerpunkt der projizierten Lastangriffslinie.

In bezug auf die Aufhängepunkte würde die Resultierende $p_k l$ ein Drillemoment von der Grösse $p_k l \cdot X_R$ erzeugen, wobei X_R den in den Grundriss projizierten Abstand des Schwerpunktes der gekrümmten Lastangriffslinie von der Trägerlängsachse z bedeutet. Nun herrscht jedoch kein Gleichgewicht, weil die Aufhängepunkte - wie vorausgesetzt - nicht in der Lage sind, Torsionsmomente aufzunehmen. Daher muss sich die Lastangriffslinie bei Lage II seitlich so weit verschieben, bis die Resultierende aller Querlasten wieder in der Symmetrie-Ebene $y-z$ liegt. Jetzt befindet sich der Träger in Lage III. Das Querverschieben jedes Lastangriffspunktes um den Betrag X_R bedingt, dass jeder Querschnitt ein und dieselbe zusätzliche Verdrehung ($\psi = \text{const}$) erfahren muss (Bild 4a). Die Endquerschnitte ($z = 0, z = l$) müssen sich um die Aufhängepunkte als Drehpole verdrehen. Die Lastangriffspunkte an diesen Stellen erfahren infolgedessen eine seitliche Verschiebung von der Grösse $f\psi$ (Bild 4 a).

Durch Gleichsetzen $X_R = f\psi$ (12)

ergibt sich die zusätzliche Verdrehung ψ des Trägers.

Die äussere Querlast p_k leistet mit den lotrechten Verschiebungskomponenten der Lastangriffspunkte infolge Verdrehung der Querschnitte $\varphi(z)$ die Arbeit $\frac{1}{2} p_k \int_0^l \varphi^2 dz$ und infolge der zusätzlichen Verdrehung der Querschnitte ψ die Arbeit $\frac{1}{2} p_k l f \psi^2$ (Bild 4a).

Daher erleidet die Querlast $p_k l$ im ganzen Träger den Potentialverlust

$$A^{***} = - \left(\frac{1}{2} p_k \int_0^l \varphi^2 dz + \frac{1}{2} p_k l f \psi^2 \right) . \quad (13)$$

Die über die Trägerlänge gleichförmige Verdrehung ψ löst im Träger keine zusätzlichen Verformungen aus. Das bedeutet, dass keine zusätzliche Formänderungsarbeit geleistet wird.

Die energetische Forderung (8) lautet nun:

$$\delta \left[\frac{1}{2} \int_0^l (E C_M \varphi''^2 + E J_Y \chi_M^2 \varphi''^2 + E J_Y u_s''^2 - 2 E J_Y \chi_M u_s'' \varphi'' + G J_t \varphi'^2 - p_k u_s'^2 - p_k i_p^2 \varphi'^2 - 2 M_{x,k} u_s'' \varphi - M_{x,r} r_x \varphi' - p_k e \varphi^2) dz - \frac{1}{2} p_k l f \psi^2 \right] = 0 \quad (14)$$

Die der gesuchten, kleinsten Kipplast zugeordnete Kippfigur wird durch Ritzsche Ansatzfunktion angenähert beschrieben. Diese lautet:

$$u_s = l \sum_{i=1}^m a_i f_i(z) \quad (15)$$

mit $i = 1, 2, 3, \dots, m$
und

$$\varphi = \sum_{k=1}^n c_k g_k(z) \quad (16)$$

mit $k = 1, 2, 3, \dots, n$

Hierin sind a_i , c_k unbekannte Vorzahlen. Die Funktionen $f_i(z)$ und $g_k(z)$ sind so zu wählen, dass sie die vorgeschriebenen Randbedingungen des Problems erfüllen. Setzt man (15) und (16) in (14) ein, führt anschliessend die Integration durch, und differenziert nun das Integrationsergebnis der Reihe nach partiell nach den Vorzahlen a_i ; c_k , so gelangt man zu $(m + n)$ linearen Gleichungen.

Die Minimumforderung (8) erfüllt man dadurch, dass man die erhaltenen linearen Gleichungen verschwinden lässt.

$$\frac{\partial(\delta^2 \Pi)}{\partial a_i} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial(\delta^2 \Pi)}{\partial c_k} = 0 \quad (18)$$

Damit erhält man ein homogenes Gleichungssystem. Soll dieses eine von der trivialen Nulllösung verschiedene Lösung für die Unbekannten a_i , c_k haben, wie dies dem unendlich kleinen Ausweichen des belasteten Trägers entspricht, so muss seine Koeffizientendeterminante verschwinden.

Die Gleichung $\Delta_k = 0$ (19) stellt demnach die Kippbedingung dar und dient zur Berechnung der gesuchten kleinsten Kipplast.

Der aus (19) erhaltene Wert für die kleinste Kipplast nähert sich um so mehr dem theoretisch strengen Lösungswert, je besser sich die durch die Ansatzfunktionen (15) und (16) festgelegte Kippfigur der theoretisch strengen anpasst.

2.32 Ableitung des energetischen Indifferenzkriteriums für aufgehängte, flächenartige Träger ($EI_y = \infty$)

Flächenartige Träger (Bild 5) zeichnen sich durch sehr grosse Biegesteifigkeit EI_y im Vergleich zur Torsionssteifigkeit GI_t aus. Erhalten ferner die freien Längsränder eines flächenartigen Trägers Druckspannungen, so darf man die Querverschiebung des Schubmittelpunktes M vernachlässigen ($u_M = 0$), so dass die Biegesteifigkeit $EI_y = \infty$ einzusetzen ist. Die Formänderungsarbeit setzt sich dann nur aus der Wölb- und Torsionsschubarbeit zusammen.

$$A^* = \frac{1}{2} \int_0^l (EC_M \varphi''^2 + GJ_t \varphi'^2) dz \quad (20)$$

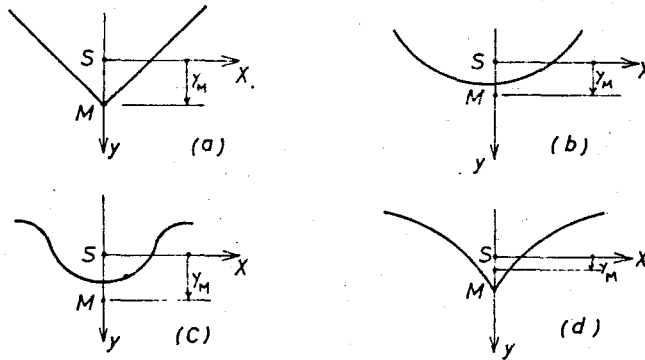


Bild 5

Wird zunächst die Querschnittsverformung beim Kippvorgang als eine Verschiebung und nachfolgende Verdrehung um den Schubmittelpunkt aufgefasst, so nimmt Gl. (10) folgende Form an:

$$\varepsilon = u_M'' \varphi(y-y_M) + \frac{1}{2} u_M'^2 + \frac{1}{2} (y-y_M)^2 \varphi'^2 + \frac{1}{2} x^2 \varphi'^2.$$

Mit $u_M = 0$ wird die Dehnung eines Faserelementes

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} y_M^2 - y y_M \right) \varphi'^2. \quad (21)$$

Bei flächenartigen Trägern (Bild 5) lassen sich die Energie-Ausdrücke vereinfachen, wenn das in Bild 6 dargestellte Bezeichnungssystem eingeführt wird. Hierin werden die Lasten und die geometrischen Grössen mit Querstrich versehen, um eine Verwechslung mit den üblichen Bezeichnungen zu vermeiden.

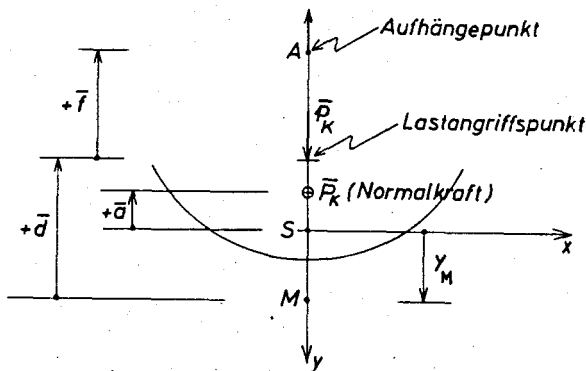


Bild 6 Koordinatensystem bei flächenartigen Trägern

Mit $\bar{\sigma} = \frac{\bar{P}_k}{F} - \frac{\bar{M}_{x,k}}{J_x} y$

und ε nach

Gl. (21) wird

$$A^{**} = -\frac{1}{2} \int_0^l (\bar{P}_k \chi_M^2 \varphi'^2 + \bar{P}_k i_p^2 \varphi'^2 + 2 \bar{M}_{x,k} \chi_M \varphi'^2 - \bar{M}_{x,k} r_x \varphi'^2) dz \quad (22)$$

Der Potentialverlust beträgt (Bild 7)

$$A^{***} = - \left(\frac{1}{2} \bar{P}_k \bar{d} \int_0^l \varphi^2 dz + \frac{1}{2} \bar{P}_k (l \bar{f} \varphi^2) \right) \quad (23)$$

wobei \bar{d} die Höhe des Lastangriffspunktes über dem Schubmittelpunkt bedeutet.

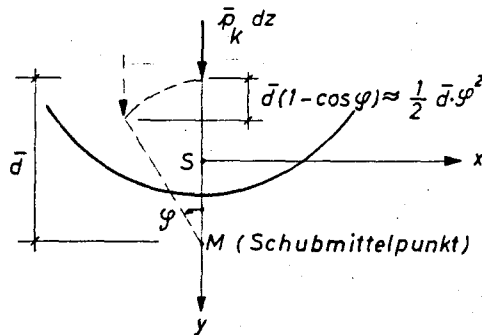


Bild 7. Lastsenkung infolge Verdrehung $\varphi(z)$ um M

Die energetische Forderung (8) lautet nun

$$\delta \left[\frac{1}{2} \int_0^l (EC_M \varphi''^2 + GJ_t \varphi'^2 - \bar{P}_k \chi_M^2 \varphi'^2 - \bar{P}_k i_p^2 \varphi'^2 - \right. \\ \left. - 2 \bar{M}_{x,k} \chi_M \varphi'^2 + \bar{M}_{x,k} r_x \varphi'^2 - \bar{P}_k \bar{d} \varphi^2) dz - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \bar{P}_k [f \varphi^2] \right] = 0 \quad (24)$$

Nachdem die energetischen Indifferenzkriterien (14) und (24) für die aufgehängten Träger entwickelt wurden, soll im folgenden für verschiedene Lastfälle und Randbedingungen die Kipplast bestimmt werden.

Zur klaren Kennzeichnung der Randbedingungen wird von den in DIN 4114 angeführten Kennwerten β und β_0 Gebrauch gemacht.

β gibt den Grad der elastischen Einspannung gegen Verbiegung um die y-Achse an.

$\beta = 1$ bei gelenkiger Lagerung um y-Achse

$\beta = 0,5$ bei voller Einspannung

β_0 stellt das Mass der Verwölbung des Endquerschnittes in Richtung der Trägerachse dar.

$\beta_0 = 1$ bei freier Verwölbung des Endquerschnittes

$\beta_0 = 0,5$ bei voller Verwölbungsbehinderung des Endquerschnittes.

3. Aufgehängte Träger ohne Endscheiben an den Stirnflächen ($\beta = \beta_0 = 1$)

3.1 Gleichmässig verteilte Querlast

3.1.1 Allgemeiner Fall

Es muss vorweg darauf hingewiesen werden, dass die in den D.Gln. (1) und (2) auftretenden Grössen $u_s(z)$, $\varphi(z)$ nicht dieselbe Bedeutung haben, wie diejenigen, die im energetischen Indifferenzkriterium (14) vorkommen. Nach der Gleichgewichtsmethode stellen $u_s(z)$, $\varphi(z)$ die Gesamtverformungen des Trägers von der unverformten, geraden Lage I zu der deformierten Endlage III dar. Hingegen beschreiben $u_s(z)$, $\varphi(z)$ laut der im Abchn. 2.3 angeführten energetischen Überlegungen die Teildeformationen des Trägers von der geraden Lage I zur deformierten Zwischenlage II (vergl. Bild 4).

Um eine Verwechslung auszuschalten, werden die Gesamtverformungen mit $u_{s_0}(z)$ und $\varphi_0(z)$ bezeichnet, wobei gemäss Bild 4. folgende Bezeichnungen gelten:

$$u_{s_0}(z) = u_s(z) - (f + e) \psi, \quad (25)$$

$$\varphi_0(z) = \varphi(z) - \psi. \quad (26)$$

Dementsprechend sollten die in den D.Gln. (1) und (2) und in den Randbedingungen (3) bis (6) vorkommende Verformungsgrössen den Fusszeiger 0 erhalten.

Für Träger ohne Endscheiben an den Stirnflächen gelten gemäss DIN 4114 $\beta = 1$; $\beta_0 = 1$.

Es gelten folgende geometrische Randbedingungen für die Endquerschnitte ($z = 0$; $z = 1$)

$$u_{s_0} = - (f + e) \psi, \quad (27)$$

$$\varphi_0 = - \psi.$$

Die dynamischen Randbedingungen (4) und (6) können wegen $M_{x,r} = 0$ in folgender Form geschrieben werden:

$$u_{s0}'' - \gamma_M \varphi_0'' = 0, \\ E C_M \varphi_0'' + E J_Y \gamma_M^2 \varphi_0'' - E J_Y \gamma_M u_{s0}'' = 0.$$

Daraus erhält man

$$u_{s0}'' = 0, \\ \varphi_0'' = 0. \quad (28)$$

Die Randbedingungen (27) und (28) sind von den folgenden Lösungsansätzen erfüllt:

$$u_{s0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi z}{l} - (f+e) \psi, \\ \varphi_0(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{m\pi z}{l} - \psi. \quad (29)$$

Wegen der Symmetrie des Systems und der Belastung kommen nur die symmetrischen Glieder der Ansätze (29) in Frage.

Beschränkt man sich auf die ersten zwei Glieder der trigonometrischen Reihe, so kann man für $u_s(z)$ und $\varphi(z)$ schreiben:

$$u_s(z) = l a_1 \sin \frac{\pi z}{l} + l a_3 \sin \frac{3\pi z}{l}, \\ \varphi(z) = c_1 \sin \frac{\pi z}{l} + c_3 \sin \frac{3\pi z}{l}. \quad (30)$$

Zunächst ist die zusätzliche Verdrehung ψ zu bestimmen.

Da X_R die Lage des Schwerpunktes der gekrümmten Angriffslinie definiert (Bild 4b), folgt aus statischen Momenten

$$X_R = \frac{1}{l} \int_0^l u_s dz - \frac{e}{l} \int_0^l \varphi dz,$$

und aus der Bedingung (12) $X_R = f \psi$:

$$\psi = \frac{1}{lf} \int_0^l u_s dz - \frac{e}{lf} \int_0^l \varphi dz. \quad (31)$$

Mit den gewählten Ansätzen (30) erhält man den endgültigen Ausdruck für ψ in der Form

$$\psi = \frac{2}{\pi f} \left(l a_1 - e c_1 + \frac{l a_3}{3} - \frac{e c_3}{3} \right). \quad (32)$$

Für das Biegemoment gilt

$$M_{x,k} = \frac{1}{2} p_k (z_1 - z^2) \quad (33)$$

Setzt man die Lösungsansätze (30) und die Ausdrücke (32) für ψ und (33) für $M_{x,k}$ in (14) ein, führt anschliessend die Integration durch und differenziert nun das Integrationsergebnis der Reihe nach partiell nach den Vorzahlen a_1 , c_1 , a_3 und c_3 , so gelangt man zu 4 linearen Gleichungen. Durch Erfüllung der Minimumforderungen (17) und (18) erhält man ein homogenes Gleichungssystem.

Diese Gleichungen haben aber nur dann eine nicht triviale Lösung mit a_1 , c_1 , a_3 , $c_3 \neq 0$, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwinden, d.h.

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (34)$$

Aus der Kippbedingung $\Delta = 0$ können die kritischen Werte p_k der Belastung berechnet werden.

Die oben stehenden K-Werte haben im vorliegenden Fall folgende Bedeutungen:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{\pi^4}{2l} EJ_Y - \frac{4}{\pi^2} p_k \frac{l^3}{f}, \\ K_{12} = K_{21} &= -\frac{\pi^4}{2l^2} EJ_Y \gamma_H + p_k l^2 \left(\frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{8} \right) + \frac{4}{\pi^2} p_k l^2 \frac{e}{f}, \\ K_{13} = K_{31} &= -\frac{4}{3\pi^2} p_k \frac{l^3}{f}, \\ K_{14} = K_{41} &= -\frac{3}{32} p_k l^2 + \frac{4}{3\pi^2} p_k l^2 \frac{e}{f}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{22} &= \frac{\pi^4}{2l^3} (EC_M + EJ_Y \chi_M^2) + \frac{\pi^2}{2l} GJ_t - p_k l r_x \left(\frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{8} \right) \\
 &\quad - p_k l \frac{e}{2} - \frac{4}{\pi^2} p_k l \frac{e^2}{f}, \\
 K_{23} = K_{32} &= -\frac{27}{32} p_k l^2 + \frac{4}{3\pi^2} p_k l^2 \frac{e}{f}, \\
 K_{24} = K_{42} &= +\frac{15}{32} p_k l r_x - \frac{4}{3\pi^2} p_k l \frac{e^2}{f}, \\
 K_{33} &= +\frac{81\pi^4}{2l} EJ_Y - \frac{4}{9\pi^2} p_k l^3, \\
 K_{34} = K_{43} &= -\frac{81\pi^4}{2l^2} EJ_Y \chi_M + p_k l^2 \left(\frac{3\pi^2}{8} + \frac{1}{8} \right) + \frac{4}{9\pi^2} p_k l^2 \frac{e}{f}, \\
 K_{44} &= +\frac{81\pi^4}{2l^3} (EC_M + EJ_Y \chi_M^2) + \frac{9\pi^2}{2l} GJ_t - p_k l \frac{e}{2} \\
 &\quad - p_k l r_x \left(\frac{3\pi^2}{8} - \frac{1}{8} \right) - \frac{4}{9\pi^2} p_k l \frac{e^2}{f}.
 \end{aligned}$$

Die Bestimmung der kritischen Last p_k aus der Kippbedingung (34) ist sehr langwierig und zeitraubend. Daher begnügt man sich mit Näherungslösungen, soweit die Genauigkeit der Ergebnisse unwesentlich beeinträchtigt wird. (vergl. Abschnitt 3.13)

Es gelingt eine geschlossene Lösung zu finden, wenn folgende einfache Lösungsansätze gewählt werden:

$$\begin{aligned}
 u_s(z) &= l a_1 \sin \frac{\pi z}{l}, \\
 \varphi(z) &= c_1 \sin \frac{\pi z}{l}.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Demnach vereinfacht sich die Kippbedingung (34) zu

$$\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{36}$$

Mit den obigen K-Werten erhält man die gesuchte Kippgleichung

wie folgt:

$$\begin{aligned}
 & p_k^2 l^6 \left[\left(\frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{8} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi^2} \right) \left(\frac{e}{f} - \frac{r_x}{2f} \right) \right] + \\
 & + p_k l^2 \left[\frac{\pi^4}{4} E J_y \left\{ \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4} \right) r_x + e - \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \right) \chi_M \right\} + \right. \\
 & + 2 \frac{\pi^2}{f} E J_y \left\{ e^2 - 2 e \chi_M + \chi_M^2 + \frac{E C_M}{E J_y} + \frac{l^2}{\pi^2} \frac{G J_t}{E J_y} \right\} \left. - \right. \\
 & \left. - \left[\frac{\pi^8}{4 l^2} E C_M E J_y + \frac{\pi^6}{4} G J_t E J_y \right] = 0 \right. \quad (37)
 \end{aligned}$$

oder in einer für den praktischen Gebrauch besser geeigneten Form

$$\begin{aligned}
 & p_k^2 l^6 \left[0,287 + 0,232 \left(\frac{e}{f} - \frac{r_x}{2f} \right) \right] + \\
 & + p_k l^2 E J_y \left[13,940 r_x + 24,352 e - 52,331 \chi_M + \right. \\
 & + \frac{19,739}{f} \left(e^2 - 2 e \chi_M + \chi_M^2 \right) + \frac{19,739}{f} \frac{E C_M}{E J_y} + \frac{2 l^2}{f} \frac{G J_t}{E J_y} \left. - \right. \\
 & \left. - \left[2372,13 \frac{E C_M E J_y}{l^2} + 240,35 G J_t E J_y \right] = 0 \right. \quad (38)
 \end{aligned}$$

Die kritische Last für einige Sonderfälle soll aus der allgemeinen Gl. (38) abgeleitet werden.

1. Sonderfall: Gabellagerung ($f = \infty$)

Hierin liegt der Aufhängepunkt, der ebenfalls den Drehpol des Endquerschnittes des Trägers darstellt, im Unendlichen. Das bedeutet, dass eine Verdrehung der Trägerquerschnitte an den Stellen $z = 0$; $z = 1$ nicht mehr möglich ist, was dem Fall einer Gabellagerung entspricht.

Setzt man $f = \infty$ in Gl. (38) ein, so nimmt die Kippgleichung die einfachere Form an:

$$\begin{aligned}
 & 0,287 p_k^2 l^6 + E J_y (13,940 r_x + 24,352 e - 52,331 \chi_M) p_k l^2 - \\
 & - \left(2372,13 \frac{E C_M E J_y}{l^2} + 240,35 G J_t E J_y \right) = 0 \quad (39)
 \end{aligned}$$

WITTE gibt in seiner Dissertation [8] eine Gleichung zur Berechnung der Kipplast gabelgelagerter Balken an. Durch Erweiterung seiner Gleichung mit 4 und Ausführung einiger Umformungen erhält man bei $P_k = 0$; $N_A = M_B = 0$ Gl. (39) .

2. Sonderfall: Rechteckquerschnitt ($r_x = y_M = C_M = 0$)

Ferner wird angenommen, dass die Querlast (z.B. Eigengewicht) im Schwerpunkt jedes Querschnittes angreift, d.h. $e = 0$ ist. Die Kippgleichung (38) lautet dann

$$0,287 \frac{P_k^2 l^6}{G J_t} + \frac{2}{f} P_k l^4 - 240,35 E J_y = 0 \quad (40)$$

Mit der Annahme $G I_t = \infty$ ergibt sich

$$P_k = 120,17 \frac{E I_y f}{l^4} \quad (41)$$

Für einen aufgehängten Balken mit quasi wölbfreiem Rechteckquerschnitt kann die kritische Last p_k auch nach CSONKA [10] ermittelt werden. Er gibt aus der Lösung der D.-Gln. des Kipp-Problems für diesen einfachen Fall folgende Gleichung an - siehe auch [1] -

$$\begin{aligned} P_k \frac{l^2 f}{G J_t} \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha^2 l^2}{40} + \frac{\alpha^2 l^2}{30} - \frac{\alpha^2 l^2}{84} + \dots \right) \\ = \alpha^2 l^2 \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} - \frac{\alpha^2 l^2}{672} + \dots \right) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\text{mit } \alpha^2 = \frac{P_k l^4}{4 E J_y G J_t} .$$

Vernachlässigt man die Summanden von kleinem Einfluss auf das strenge Ergebnis, so erhält man die Näherungsformel

$$P_k = 120 \frac{E I_y f}{l^4} \quad (43)$$

Gl. (43) stimmt mit Gl. (41) überein, die mit Hilfe der Energiemethode abgeleitet wurde.

LEBELLE [12] hat denselben Fall wie CSONKA, behandelt. Er gibt die Kipplast in der Form

$$p_k = \frac{16\sqrt{\alpha}}{l^3} \sqrt{E J_y G J_t} \quad (44)$$

an. Zur Erleichterung der Auswertungen ist der Parameter gegenüber einer Hilfsgrösse $4f/l \cdot \sqrt{E J_y / G J_t}$ in seiner Arbeit graphisch dargestellt worden.

Um die Übereinstimmung der Gl. (44) mit Gl. (40) überprüfen zu können, muss diese Hilfsgrösse zahlenmässig angegeben werden.

Mit $I_y / I_t = 1/4$ (für schmales Rechteck),

$$G = 0,4 E \quad \text{und} \quad f = 0,20 l$$

$$\text{wird } 4f/l \cdot \sqrt{E J_y / G J_t} = 0,632$$

Aus [12, S. 826] liest man $\alpha = 0,8$ ab. Die Kipplast ergibt sich aus (44)

$$p_k = 14,304 \frac{\sqrt{E J_y G J_t}}{l^3},$$

und aus Gl. (46)

$$p_k = 14,332 \frac{\sqrt{E J_y G J_t}}{l^3}.$$

Damit ist die Übereinstimmung der Gl. (44) mit Gl. (40) nachgewiesen.

Ferner erkennt man die Tatsache, dass die Energiemethode etwas höhere Werte liefert als die Gleichgewichtsmethode.

3. Sonderfall: Unendlich grosse Biegesteifigkeit ($E I_y = \infty$)

Unter dieser Annahme vereinfacht sich Gl. (37) zu

$$p_k = \frac{\pi^2}{l^2 \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4} \right) r_x + e - \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \right) \gamma_m + \frac{8}{\pi^2 l} (e^2 - 2e\gamma_m + \gamma_m^2)} \cdot \frac{\pi^2/l^2 \cdot EC_M + GJ_t}{(45)}$$

Es lässt sich zeigen, dass Gl. (45) in sehr einfache Form übergeht, wenn die Bezeichnungen gemäss Bild 6 eingeführt werden. Im die Transformation von einem zum anderen Bezeichnungssystem in übersichtlicher Weise durchzuführen, werden die beiden Systeme in Bild 8 gegenübergestellt.

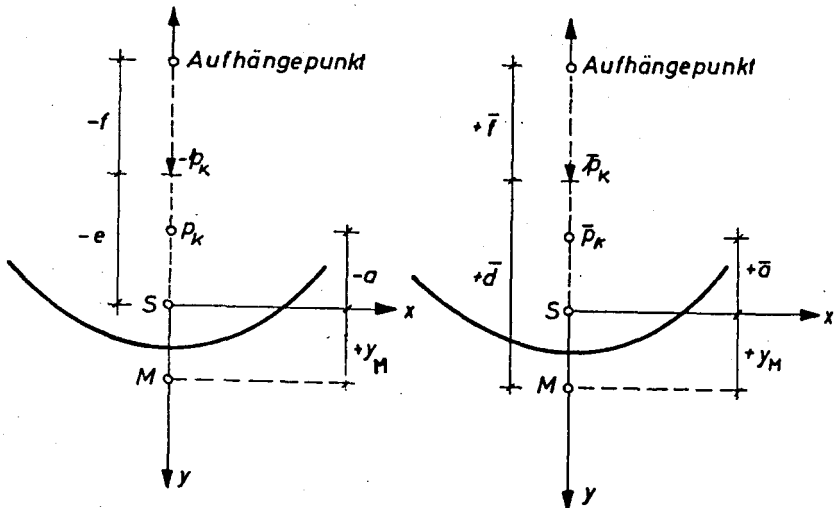


Bild 8 Gegenüberstellung der verwendeten Koordinatensysteme

Es ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} p_k &\hat{=} \bar{p}_k & ; & & - a &\hat{=} \bar{a} \\ - p_k &\hat{=} \bar{p}_k & ; & & - e &= \bar{d} - y_M \\ - f &\hat{=} \bar{f} \end{aligned} \quad (46)$$

Nach Einführung (46) in Gl. (45) erhält man

$$p_k = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{\pi^2/l^2 EC_M + GJ_t}{0,5725(2\gamma_M - r_x) + \bar{d} + 0,8105 \frac{\bar{d}^2}{f}} \quad (47)$$

3.12 Sonderfall : $E I y = \infty$

Hierin braucht man nur einen Lösungsansatz für die Querschnittsverdrehung φ anzunehmen. Man wähle den folgenden 3-gliedrigen Ansatz

$$\varphi(z) = c_1 \sin \frac{\pi z}{l} + c_3 \sin \frac{3\pi z}{l} + c_5 \sin \frac{5\pi z}{l} \quad (48)$$

Die Bestimmungsgleichung (31) für φ lautet dann

$$\psi = - \frac{\bar{d}}{l f} \int_0^l \varphi dz. \quad (49)$$

Analog dem allgemeinen Fall lässt sich die gesuchte Kippbedingung ableiten, die in folgender Determinanten-Form geschrieben werden kann.

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (50)$$

Dabei bedeuten

$$K_{11} = \frac{\pi^2}{2} \frac{GJ_t}{l} + \frac{\pi^4}{2} \frac{EC_M}{l^3} + \left(\frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{8} \right) (r_x - 2y_M) \bar{p}l - \bar{p}l \frac{\bar{d}}{2} - \frac{4}{\pi^2} \frac{\bar{p}l \bar{d}^2}{f},$$

$$K_{12} = K_{21} = -\frac{15}{32} (r_x - 2y_M) \bar{p}l - \frac{4}{3\pi^2} \frac{\bar{p}l \bar{d}^2}{f},$$

$$K_{13} = K_{31} = -\frac{65}{288} (r_x - 2y_M) \bar{p}l - \frac{4}{5\pi^2} \frac{\bar{p}l \bar{d}^2}{f},$$

$$K_{22} = \frac{9\pi^2}{2} \frac{GJ_t}{l} + \frac{81\pi^4}{2} \frac{EC_M}{l^3} + \left(\frac{3\pi^2}{8} - \frac{1}{8} \right) (r_x - 2y_M) \bar{p}l - \bar{p}l \frac{\bar{d}}{2} - \frac{4}{9\pi^2} \frac{\bar{p}l \bar{d}^2}{f},$$

$$K_{23} = K_{32} = -\frac{255}{128} (r_x - 2y_M) \bar{p}l - \frac{4}{15\pi^2} \frac{\bar{p}l \bar{d}^2}{f},$$

$$K_{33} = \frac{25\pi^2}{2} \frac{GJ_t}{l} + \frac{625\pi^4}{2} \frac{EC_M}{l^3} + \left(\frac{25\pi^2}{24} - \frac{1}{8} \right) (r_x - 2y_M) \bar{p}l - \bar{p}l \frac{\bar{d}}{2} - \frac{4}{25\pi^2} \frac{\bar{p}l \bar{d}^2}{f}.$$

Sonderfall: $\bar{d} = 0, C_M = 0$

Unter den Annahmen, dass die Last im Schubmittelpunkt angreift und die Verwölbung des Querschnittes vernachlässigt ist (z.B. bei ∇ -förmigen Querschnitten), ergibt die Kippbedingung (50)

$$p^{1/8} = 1,097 \frac{GI_t}{2 y_M - r_x}. \quad (51)$$

Es sei hierbei erwähnt, dass die Kipplast nicht mehr von der Aufhängehöhe \bar{f} beeinflusst wird, wenn die Last im Schubmittelpunkt angreift ($\bar{d} = 0$). Die Erklärung dafür liegt darin, dass bei der Annahme $EI_y = \infty$ der Schubmittelpunkt den Drehpol des Querschnittes darstellt. Daher leistet die im Schubmittelpunkt angreifende Last keine äussere Arbeit, die durch die Verdrehung des Querschnittes bedingt ist.

Wird vereinfachend der Lösungsansatz (48) auf die ersten zwei Glieder beschränkt, d.h.

$$\varphi = c_1 \sin \frac{\pi z}{l} + c_3 \sin \frac{3\pi z}{l}, \quad (52)$$

so lässt sich die Kippbedingung in einer geschlossenen Form angeben wie folgt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (53)$$

oder $K_{11} \quad K_{22} - K_{12} \quad K_{21} = 0$.

Mit den obigen K-Werten in der Kippbedingung erhält man folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & (\bar{p}l)^2 \left[\frac{1}{64} (r_x - 2\gamma_M)^2 \left\{ \left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) (3\pi^2 - 1) - \frac{225}{16} \right\} - \right. \\ & \quad - \frac{d}{16} (r_x - 2\gamma_M) \left\{ \left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) + (3\pi^2 - 1) \right\} + \frac{d^2}{4} - \\ & \quad - \frac{d^2}{f} (r_x - 2\gamma_M) \left\{ \frac{5}{4\pi^2} + \frac{1}{18\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) + \frac{1}{2\pi^2} (3\pi^2 - 1) \right\} + \\ & \quad \left. + \frac{d^3}{f} \left\{ \frac{2}{9\pi^2} + \frac{2}{\pi^2} \right\} \right] + \\ & + (\bar{p}l) \left[(r_x - 2\gamma_M) \frac{GJ_t}{l} \left\{ \frac{\pi^2}{16} (3\pi^2 - 1) + \frac{9\pi^2}{16} \left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) \right\} + \right. \\ & \quad + (r_x - 2\gamma_M) \frac{EC_M}{l^3} \left\{ \frac{\pi^4}{16} (3\pi^2 - 1) + \frac{81\pi^4}{16} \left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) \right\} + \\ & \quad + d \frac{GJ_t}{l} \left(-\frac{\pi^2}{4} - \frac{9\pi^2}{4} \right) + d \frac{EC_M}{l^3} \left(-\frac{\pi^4}{4} - \frac{81\pi^4}{4} \right) + \\ & \quad + \frac{d^2}{f} \frac{GJ_t}{l} \left(-\frac{2}{9} - 18 \right) + \frac{d^2}{f} \frac{EC_M}{l^3} \left(-\frac{2\pi^2}{9} - 162\pi^2 \right) \Big] + \\ & + \frac{9\pi^4}{4} \left(\frac{GJ_t}{l} \right)^2 + \frac{45\pi^6}{2} \frac{GJ_t}{l} \cdot \frac{EC_M}{l^3} + \frac{81\pi^8}{4} \left(\frac{EC_M}{l^3} \right)^2 = 0, \quad (54) \end{aligned}$$

oder in einer für den praktischen Gebrauch besser geeigneten Form:

$$\begin{aligned}
 (\bar{p}l)^2 \left\{ 0,8038 (r_x - 2\gamma_M)^2 - 1,9311 (r_x - 2\gamma_M) \bar{d} + 0,2500 \bar{d}^2 - \right. \\
 \left. - 1,5889 (r_x - 2\gamma_M) \frac{\bar{d}^2}{f} + 0,2252 \frac{\bar{d}^3}{f} \right\} + \\
 + \bar{p}l \left\{ 30,3595 (r_x - 2\gamma_M) \frac{GJ_t}{l} + 1303,3511 (\gamma_x - 2\gamma_M) \frac{EC_M}{l^3} - \right. \\
 \left. - 24,6740 \bar{d} \frac{GJ_t}{l} - 1996,8846 \bar{d} \frac{EC_M}{l^3} - \right. \\
 \left. - 18,2222 \frac{\bar{d}^2}{f} \frac{GJ_t}{l} - 1601,0684 \frac{\bar{d}^2}{f} \frac{EC_M}{l^3} \right\} + \\
 + \left\{ 219,1705 \left(\frac{GJ_t}{l} \right)^2 + 27631,21 \frac{GJ_t}{l} \frac{EC_M}{l^3} + \right. \\
 \left. + 192146,30 \left(\frac{EC_M}{l^3} \right)^2 \right\} = 0 \quad (55)
 \end{aligned}$$

Sonderfall: $\bar{d} = 0$, $C_M = 0$

Gl.(55) ergibt hierfür

$$\bar{p}l^2/8 = 1,215 \frac{GJ_t}{2\gamma_M - r_x} \quad (56)$$

Zur Überprüfung der Richtigkeit der Gl. (56) steht die Veröffentlichung von MEISSNER [7] zur Verfügung. Hierin wurde ebenfalls der Ansatz (52) zugrunde gelegt. Nach langen Zwischenrechnungen lässt sich seine Lösung für den Fall $EI_y = \infty$ und bei Vernachlässigung der Querschnittsverwölbung wie folgt schreiben (Bezeichnungen gemäss Bild 2):

$$(BD - F^2) \frac{R_k^2 l^6}{4l^2(GJ_t)^2} - \frac{\pi^2}{2} (9B + D) \frac{R_k l^3}{l GJ_t} + 9\pi^4 = 0$$

$$\text{mit } B = \left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) \frac{r_x}{2} - \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) \gamma_M + 2e,$$

$$D = (3\pi^2 - 1) \frac{r_x}{2} - (3\pi^2 + 1) \gamma_M + 2e,$$

$$F = \frac{15}{8} (2\gamma_M - r_x)$$

Nach Einführung der Bezeichnungen gemäss Bild 6 nimmt die obige Gleichung für den Fall $\bar{d} = 0$ folgende Form an:

$$\bar{p}_k l^2 / 8 = 1,21 \frac{G J_t}{2 Y_M - r_x} \quad (57)$$

Damit ist die Übereinstimmung der Gl. (56) mit Gl. (57) nachgewiesen.

Um später im Abschn. 3.13 die Brauchbarkeit der verschiedenen gewonnenen Lösungen beurteilen zu können, wird auch der eingliedrige Ansatz

$$\varphi(z) = C_1 \sin \frac{\pi z}{l} \quad (58)$$

herangezogen.

Die Kippbedingung lautet: $\Delta = k_{11} = 0$.

Daraus folgt

$$\bar{p}_k = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{\pi^2 l^2 E C_M + G J_t}{0,5725 (2 Y_M - r_x) + \bar{d} + 0,8405 \bar{d}^2} \quad (59)$$

Diese Gleichung stimmt mit Gl. (47) vollkommen überein. Gln. (47) und (59) sind aus verschiedenen energetischen Indifferenzkriterien abgeleitet worden.

Sonderfall: $\bar{d} = 0, C_M = 0$

Gl. (59) ergibt hierfür

$$\bar{p}_k l^2 / 8 = 2,155 \frac{G J_t}{2 Y_M - r_x} \quad (60)$$

Die Brauchbarkeit der verschiedenen abgeleiteten Formeln wird im nächsten Kapitel 3.13 eingehend behandelt.

3.13 Genauigkeitsbetrachtungen

Es ist zwischen 2 Querschnittstypen zu unterscheiden. Zu Gruppe I gehören die Balkenträger mit Rechteckquerschnitten bzw. mit T- und I- Profilen. Bei diesen Querschnitten erweist sich der eingliedrige Ansatz (35) zur

Bestimmung der Kipplast als ausreichend genug. Aus der zugehörigen Lösung (39) erhält man für quasi wölbfreie Querschnitte

$$p_k l^3 = 28,9 \sqrt{E J_y G J_t} \quad (61)$$

nach TIMOSHENKO [4]

$$p_k l^3 = 28,3 \sqrt{E J_y G J_t} \quad (62)$$

Hierbei beträgt die Abweichung zwischen der Energiemethode (Gl. 61) und der Gleichgewichtsmethode (Gl. 62) 2,12 %. Bei T- oder I-Querschnitten lassen Vergleichsrechnungen feststellen, dass der eingliedrige Ansatz (35) ausreichend genaue Ergebnisse zur Berechnung der Kipplast liefert. (Abweichung ca. 3 %). Hierzu vergleiche man Beispiel 1 und 2.

Schliesslich zieht man die folgende Schlussfolgerung: Die Kipplast der aufgehängten Balkenträger der Gruppe I darf mit genügender Genauigkeit aus Gl. (38) ermittelt werden.

Zur Gruppe II gehören die flächenartigen Träger mit in Bild 5 dargestellten Querschnitten. Für den Fall $\bar{d} = 0$, $C_M = 0$ lässt sich die Kipgleichung in folgender Form schreiben:

$$N_k = \frac{\bar{p}_k l^2}{8} = \alpha \frac{G J_t}{2 \chi_M - r_x} \quad (63)$$

wobei α einen Beiwert darstellt, der vom verwendeten Ansatz abhängig ist. α ist der Tafel I zu entnehmen.

T a f e l I

Ansatz	α	Abbruchfehler in %
$\varphi = c_1 \sin \frac{\pi x}{l}$	2,155 aus Gl. (60)	96,3
$\varphi = c_1 \sin \frac{\pi x}{l} + c_3 \sin \frac{3\pi x}{l}$	1,215 aus Gl. (56)	10,7
$\varphi = c_1 \sin \frac{\pi x}{l} + c_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + c_5 \sin \frac{5\pi x}{l}$	1,097 aus Gl. (51)	0

Als Grenzzustand betrachte man den Lastfall eines konstanten Biegemoments. Aus der strengen Lösung [16] ergibt sich unter den vereinfachten Annahmen $EJ_y = \infty$, $EC_M = 0$ das Kippmoment

$$M_k = 1,0 \frac{GJ_t}{2\gamma_M - r_x} \quad (64)$$

Daraus erfolgt, dass der in Gl. (63) auftretende Faktor auf jeden Fall grösser als 1 sein muss, soweit die Querbelastung im Schubmittelpunkt angreift.

Ferner erkennt man aus Tafel I, dass der eingliedrige Ansatz (35) oder (58) völlig unbrauchbare Ergebnisse liefert. Hierbei beträgt der Abbruchfehler ca. 96 %. Hingegen beträgt die Abweichung ca. 11 %, wenn der Bestimmung der Kipplast ein zweigliedriger Ansatz zugrunde gelegt wird. Die Zahlenrechnungen zeigen, dass in Wirklichkeit der Abbruchfehler viel kleiner ist, wenn der Lastangriffspunkt mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Im Beispiel 3 beträgt die Abweichung nur ca. 2,4 %.

Nun kann man die zweite Schlussfolgerung ziehen:

Die Kipplast der aufgehängten, flächenartigen Träger der Gruppe II darf mit ausreichender Genauigkeit aus Gl. (55) bestimmt werden, soweit die Annahme $EI_y = \infty$ Gültigkeit hat. Dies wird im nächsten Kapitel 3.14 weitgehend untersucht.

Könnte von der Annahme $EI_y = \infty$ kein Gebrauch gemacht werden, so müsste die Kipplast zumindest aus der 4-reihigen Determinante (34) ermittelt werden. Das ist der Fall bei flächenartigen Trägern, wenn die freien Längsränder Zugspannungen erhalten (Bild 1 c - d). Glücklicherweise besitzen solche flächenartigen Träger enorme Kippsicherheit; Daher kommt die Kippuntersuchung solcher Fälle praktisch nie in Frage (vergl. Beispiel 4).

3.14 Untersuchung der Gültigkeit der Annahme $EI_y = \infty$

Um die Grenzen des Gültigkeitsbereiches der vereinfachten Annahme $EI_y = \infty$ festzustellen, sollte man die Kippbedingungen (34) und (53) miteinander vergleichen. Dabei ist es praktisch unmöglich, einfache Regeln in übersichtlicher Weise herzuleiten. Deshalb begnügt man sich mit einem Näherungsverfahren, das rasch zum Ziel führt. Wie später gezeigt wird, liefert

dieses Verfahren niedrigere Werte für die obere Grenze des Gültigkeitsbereiches.

Als Ausgang dieser Untersuchung dient die quadratische Gleichung (37) mit $f = \infty$ und $e = 0$. Sie kann nun in der allgemeinen Form

$$\alpha (p_k l)^2 + \beta (p_k l) + \gamma = 0 \quad (65)$$

geschrieben werden.

Darin bedeuten

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{l^2}{E J_y} \left(\frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{8} \right) , \\ \beta &= \frac{\pi^4}{8l} \left[\left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) \frac{r_x}{2} - \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) \gamma_M \right] , \\ \gamma &= -\frac{\pi^6}{4l^2} \left(\frac{\pi^2}{l^2} E C_M + G J_t \right) . \end{aligned}$$

Im allgemeinen lässt sich die Lösung einer quadratischen Gleichung durch eine unendliche Reihe wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} (p_k l) &= -\frac{\gamma}{\beta} (1 + \lambda + 2\lambda^2 + 5\lambda^3 + \dots) , \\ \text{mit } \lambda &= \alpha \gamma / \beta^2 \end{aligned} \quad (66)$$

Andererseits nimmt Gl. (65) unter der Annahme $E I_y = \infty$ folgende Form an $(p_k l) = -\frac{\gamma}{\beta}$.

Gl. (66) kann demgemäss in der Form

$$p_k l = p_k^* l (1 + \lambda + 2\lambda^2 + 5\lambda^3 + \dots) \quad (67)$$

geschrieben werden.

Nach Einführung der Abkürzungen für α , β und γ wird

$$\lambda = -\frac{0,466 l^2 \left(\frac{\pi^2}{l^2} \frac{E C_M}{E J_y} + \frac{G J_t}{E J_y} \right)}{(1,4449 r_x - 4,2898 \gamma_M)^2} . \quad (68)$$

Die Kipplast $p_k l$ nähert sich um so mehr dem Grenzwert $p_k^* l$ (bei $E I_y = \infty$), je kleiner der λ -Wert ist. Im Grenzfall verschwindet λ , wenn $E I_y$ eine unendliche Grösse erreicht.

Es ist bemerkenswert zu erwähnen, dass λ bei doppelt-symmetrischen Querschnitten den Wert ∞ annimmt, weil

$r_x = y_M = 0$ ist. Das bedeutet, dass die in (67) auftretende Reihe nicht mehr konvergiert.

Nun sollen die λ - Werte für ∇ -förmigen und für \cup -förmigen Querschnitt ausgewertet werden.

Für den dünnwandigen, ∇ - förmigen Querschnitt gelten folgende Beziehungen (Bild 9)

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{h}{2} \quad , & r_x &= -\frac{b^2}{h} \quad , \\ J_y &= \frac{2}{3} t s b^2 \quad , & J_t &= \frac{2}{3} s t^3 \quad , & C_M &= 0 \quad , \\ G &= \frac{3}{7} E \quad . \end{aligned}$$

-Somit lässt sich Gl. (68) in der Form

$$\lambda = - \alpha_v \cdot \left(\frac{l}{h}\right)^2 \left(\frac{t}{h}\right)^2 \quad (69)$$

schreiben, wobei

$\alpha_v = 0,0200$	für $b/h = 1,0$
$= 0,0040$	$= 1,5$
$= 0,0010$	$= 2,0$
$= 0,00014$	$= 3,0$

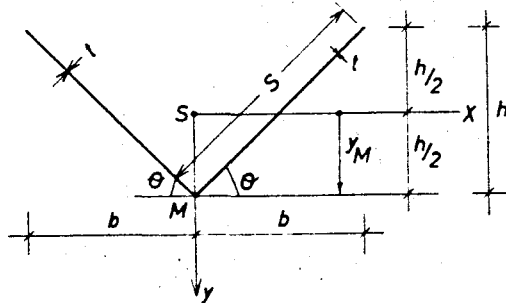


Bild 9

Für den dünnwandigen, flachen \cup -Querschnitt ($b/h \geq 3,0$)
lauten die Querschnittswerte (Bild 10):

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{8}{15} h, & r_x &= -\frac{b^2}{h} - 0,19h \approx -\frac{b^2}{h}, \\ J_y &\approx \frac{2}{3} t b^3, & J_t &\approx \frac{2}{3} b t^3, \\ C_M &\approx 0,00508 \quad t h^2 b^3. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\lambda = -\alpha_e \left(\frac{l}{h}\right)^2 \left(\frac{t}{h}\right)^2 \quad (70)$$

mit	$\alpha_e = 0,00014$	für $b = 3 h$
	$= 0,00006$	$= 3,5 h$
	$= 0,00003$	$= 4 h$

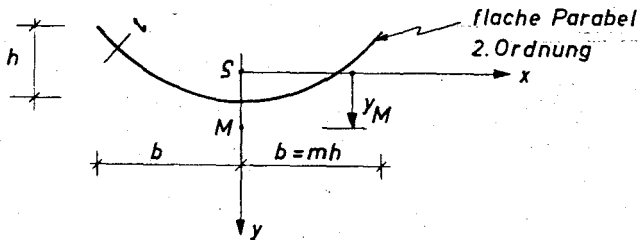


Bild 10

Beschränkt man sich auf die ersten zwei Glieder der Reihe (67) und lässt einen Fehler bis zu ca. 5 % zu, dann muss folgende Bedingung erfüllt werden:

$$\left(\frac{l}{h}\right)^2 \left(\frac{t}{h}\right)^2 \leq \frac{5}{100 \alpha} ,$$

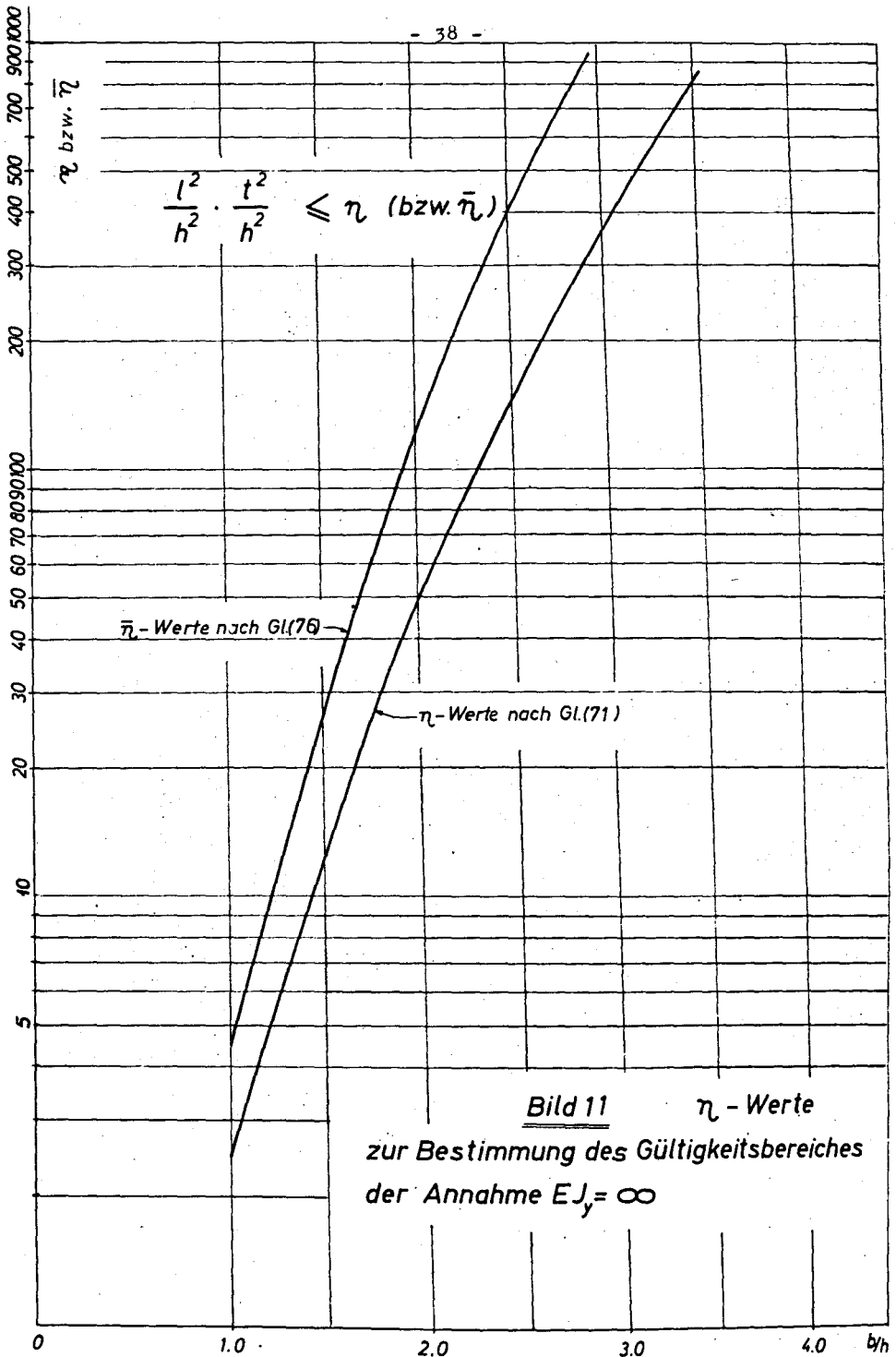
oder in zweckmässigerer Form

$$\left(\frac{l}{h}\right)^2 \left(\frac{t}{h}\right)^2 \leq \eta \quad (71)$$

η ist der Tafel II oder aus Bild 11 zu entnehmen.

T a f e l I I

V-förmige Querschnitte		┐-förmige Querschnitte	
b/h	η	b/h	η
1	2,5	3	360
1,5	12,5	3,5	830
2	50	4	1670
3	360		



Durch Vergleich der \mathcal{Z} - Werte ist zu erkennen:

Je flacher der Querschnitt, umso grösser ist der Gültigkeitsbereich der Annahme $EI_y = \infty$. Während bei schalenförmigen Querschnitten die Vergleichsgrösse $[(l/h)^2 (t/h)^2]$ für die in der Praxis vorkommenden Abmessungen scheinbar im gültigen Bereich liegt, mag es für V-förmige Querschnitte mit b/h notwendig sein, den kleinsten Grenzwert $\mathcal{Z} = 2,5$ näher zu untersuchen. In der Baupraxis schwankt l/h meistens zwischen 15 und 25, während t/h einen beliebigen Wert zwischen $1/12$ und $1/20$ annehmen kann. Als Mittelwert wähle man $l/h = 20$, $t/h = 1/15$. Das Vergleichsmass beträgt $1,78 (< 2,5)$.

Das heisst, der mit der Annahme $EI_y = \infty$ verbundene Fehler überschreitet nicht den festgelegten Grenzwert (5%). Vergleichsrechnungen zeigen, dass dieser Fehler noch kleiner ist, als oben geschildert wurde. Ein ähnliches Ergebnis wird erhalten, wenn der Fall eines Balkenträgers unter dem Angriff eines konstanten Biegemomentes dem Vergleich zugrunde gelegt wird. Denn es ist möglich, für diesen Fall eine strenge Lösung in sehr einfacher Form zu bekommen.

Nach [16] lautet die Lösung:

$$\frac{M_k^2}{EJ_y} + \frac{\pi^2}{l^2} (2\chi_M - r_x) M_k - (GJ_t + EC_M \frac{\pi^2}{l^2}) \frac{\pi^2}{l^2} = 0, \quad (72)$$

und bei $EJ_y = \infty$ wird

$$M_k = \frac{GJ_t + EC_M \frac{\pi^2}{l^2}}{2\chi_M - r_x}. \quad (73)$$

Nach ähnlichem Vorgang erhält man für λ analog Gl. (68)

$$\lambda = - \frac{\frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{GJ_t}{EJ_y} + \frac{\pi^2}{l^2} \frac{EC_M}{EJ_y} \right)}{(r_x - 2\chi_M)^2}. \quad (74)$$

Für den V-förmigen Querschnitt

$$\lambda = - \frac{1}{2\chi_v} \left(\frac{l}{h} \right)^2 \left(\frac{t}{h} \right)^2, \quad (75)$$

wobei	$\bar{e}_y = 0,0110$	für $b/h = 1,0$
	$= 0,0018$	$= 1,5$
	$= 0,0004$	$= 2,0$

Nimmt man einen Fehler bis 5 % in Kauf, so erhält man eine ähnliche Bedingung wie folgt:

$$\left(\frac{l}{h}\right)^2 \left(\frac{t}{h}\right)^2 \leq \bar{z} \quad (76)$$

\bar{z} ist der Tafel III oder aus Bild 11 zu entnehmen.

T a f e l I I I

b/h	\bar{z}
1	4,5
1,5	27
2	125

Aus Tafeln II und III kann man feststellen, dass bei denselben Grössen von l , h und t der durch die \bar{z} -Werte abgeschätzte Fehler kleiner ist als der durch z -Werte.

Zusammenfassend kann man die Schlussfolgerung ziehen, dass im Hinblick auf die Baupraxis die Annahme $Ely = \infty$ zur Vereinfachung der Kipplastbestimmung flächenartiger Träger gerechtfertigt ist.

3.15 Einfluss der Aufhängehöhe "f" auf die Kipplast

Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die Querlast im Querschnittsschwerpunkt angreift. Ferner wird der Einfluss der Querschnittsverwölbung auf die Kipplast vernachlässigt. Nachfolgend werden verschiedene Querschnittsformen untersucht.

Für Rechteck- und I-Querschnitte gilt Gl. (40), weil voraussetzungsgemäss c_M vernachlässigt ist.

Die Lösung der Gl. (40) lautet:

$$p_k^{l^3} = - 3,478 \frac{l}{f} \sqrt{GJ_t \ GJ_t} + \sqrt{12,096 \frac{l^2}{f^2} GJ_t \ GJ_t + 835,96 \ EJ_y \ GJ_t} \quad (77)$$

Für die Gabellagerung ($f = \infty$) wird Gl. (77) zu

$$(p_k^{l^3})_{\infty} = \sqrt{835,96 \ EJ_y \ GJ_t} \quad (78)$$

Bezeichnet man mit α das Verhältnis der Kipplast bei Aufhängung zu der bei Gabellagerung, so kann man für α folgende allgemeine Gleichung schreiben:

$$\alpha = - \lambda_1 \frac{l}{f} + \sqrt{\lambda_2 \frac{l^2}{f^2} + 1,0} \quad (79)$$

Für verschiedene EI_y / GI_t - Werte sind die Koeffizienten λ_1 und λ_2 numerisch ausgewertet worden und in Tafel IV wiedergegeben.

T a f e l I V

EI_y / GI_t	λ_1	λ_2
0,625	0,1520	0,0230
1	0,1204	0,0145
2	0,0847	0,0072
5	0,0537	0,0029
10	0,0381	0,0014 ⁵
100	0,0120 ⁴	0,0001 ⁴⁵

Der Parameter α schwankt in dem Bereich $0 \leq \alpha \leq 1,0$.

In Bild 12 sind die Beziehungen zwischen f/l und α für die verschiedenen EI_y / GI_t - Werte dargestellt. Daraus erkennt man, dass der Einfluss der Aufhängenhöhe auf die Kipplast bei Rechteckquerschnitten am ausgeprägtesten ist. Hierbei vermindert sich die Kipplast sehr stark, besonders bei

kleineren f/l -Verhältnissen. Ist z.B. $f/l = 0,20$, so beträgt die Abminderung der Kipplast ca. 50 % gegenüber der Gabellagerung. Mit zunehmendem EI_y / GI_t wächst der Parameter α so rasch an, dass für einen I-Querschnitt mit $EI_y / GI_t = 100$ die Abminderung der Kipplast bei $f/l = 0,2$ gegenüber Gabellagerung nur 5 % beträgt. α erreicht den Grenzwert 1,0 bei $f/l = \infty$.

Das bisherige Verfahren [12], [14] zur Berechnung der Kipplast aufgehängter Balken mit I-Querschnitten mit Hilfe der α -Werte für Rechteckquerschnitte liefert zu ungünstige Werte bezüglich der Wirtschaftlichkeit.

Für V-förmige Querschnitte können ähnliche Überlegungen gemacht werden. Wird von Gl. (55) ausgegangen, so kann man für α folgende Formel schreiben:

$$\alpha = \frac{x_1}{x_3} \left(1 - \sqrt{1 - 4 x_2 / x_1^2} \right) \quad (80)$$

Dabei bedeuten für $l/h = 15$

$$x_1 = \frac{4,870 + 0,0202 \, 1/\bar{f}}{0,0231 + 0,000243 \, 1/\bar{f}} \quad ,$$

$$x_2 = \frac{219,170}{0,0231 + 0,000243 \, 1/\bar{f}} \quad ,$$

$$x_3 = 130, \quad 244 \quad ,$$

und für $l/h = 25$

$$x_1 = \frac{2,922 + 0,0073 \, 1/\bar{f}}{0,0083 + 0,000053 \, 1/\bar{f}} \quad ,$$

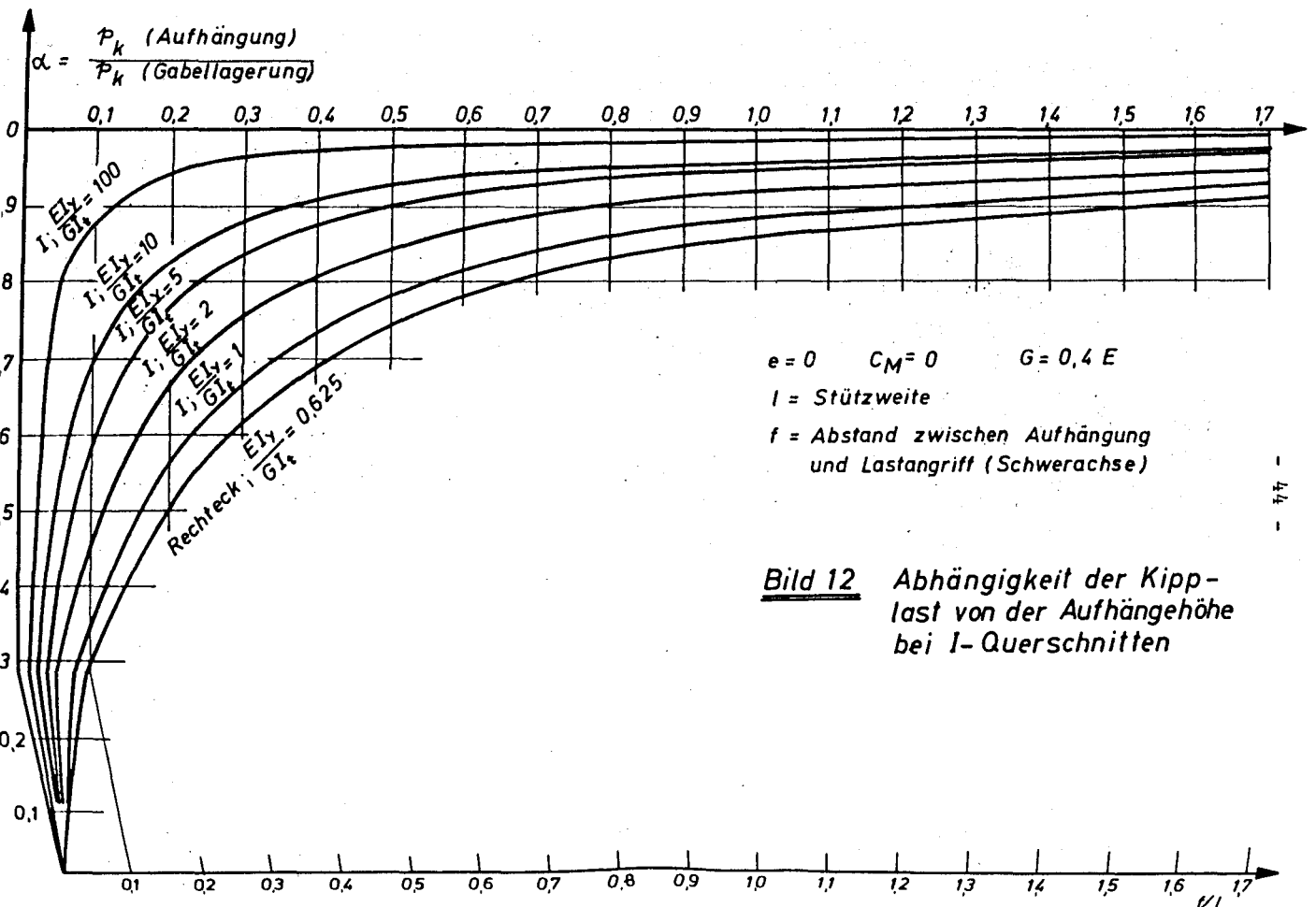
$$x_2 = \frac{219,170}{0,0083 + 0,000053 \, 1/\bar{f}} \quad ,$$

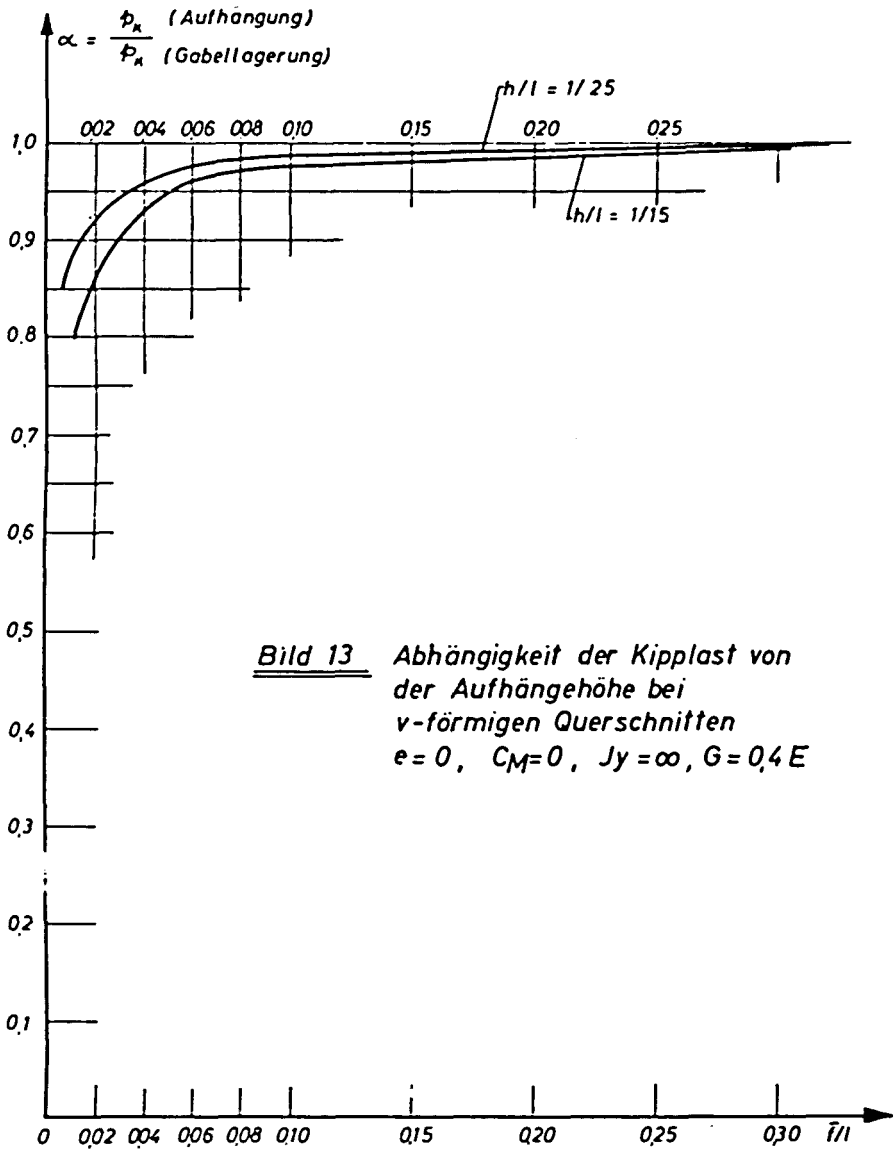
$$x_3 = 217, \quad 285 \quad .$$

In Bild 13 ist die Beziehung zwischen \bar{f}/l und α für $l/h = 15$ bzw. 25 dargestellt. Die aufgetragenen Kurven haben ähnlichen Verlauf wie die in Bild 12 dargestellten Beziehungen für I-Querschnitte. Sie unterscheiden sich dadurch, dass der Aufhängeeinfluss auf die Kippsicherheit praktisch nur bei sehr kleinen \bar{f}/l Werten spürbar ist. Die durch die Aufhängung verursachte

Abminderung der Kipplast bleibt unter 5 %, soweit \bar{f}/l den Wert 0,05 nicht unterschreitet. Zusammenfassend kann man folgende Schlussfolgerungen ziehen:

Der Abminderungsfaktor α ist im starken Mass von der Grösse EI_y / GI_t beeinflusst. Die Wirkung der Aufhängung auf die Kippsicherheit klingt um so rascher ab, je grösser die Biegesteifigkeit EI_y im Verhältnis zu der Torsionssteifigkeit GI_t ist. Hierbei ist es unwichtig, ob es sich um I- oder V-Querschnitt handelt.





3.2 Gleichmäßig verteilte Querlast und Angriff einer exzentrischen Normalkraft

3.21 Allgemeiner Fall

Die geometrischen Randbedingungen (27) behalten auch hier ihre Gültigkeit bei. Die erforderlichen, dynamischen Randbedingungen (4) und (6) müssen näher untersucht werden. Aus der Gleichgewichtsmethode ist leicht zu erkennen, dass das dritte Glied $\nu_{ki} M_{x,r} \varphi_r$ der Gl. (4) die Komponente des Randmomentes $M_{x,r}$ in der Symmetrie-Achse ζ des Randquerschnittes nach der Verformung darstellt. (Bild 14)

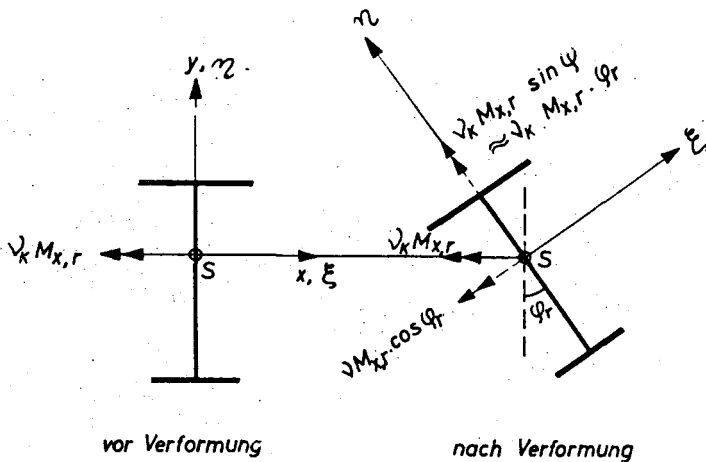


Bild 14

Bei aufgehängten Balken wird die Längskraft P durch die schrägliegenden, starren Aufhängevorrichtungen hervorgerufen (vergl. Bild 3b). Aus Bild 15 ist ersichtlich, dass der Angriffspunkt P der Normalkraft vor und nach Verdrillung des Balkens auf der Symmetrie-Achse ζ des Randquerschnittes liegt.

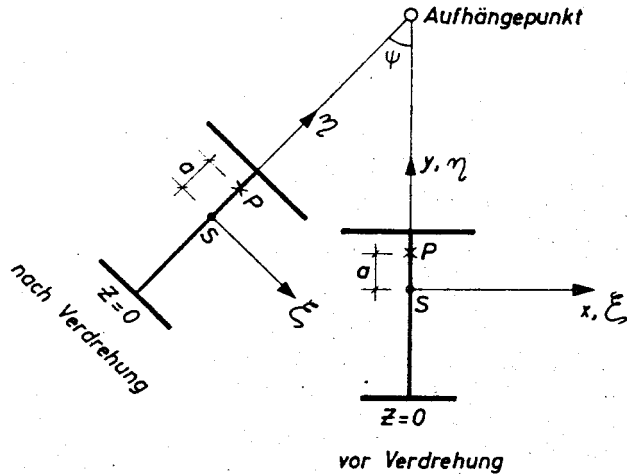


Bild 15

Das heisst: Nach der Verdrehung ergibt das Randmoment $\mathcal{M}_{x,r} = \mathcal{M}_{x,r}$ keine Komponente in ζ -Richtung, Daher ist das Glied $\mathcal{M}_{x,r} \mathcal{Q}_r = 0$ anzusetzen. Die Randbedingungen (34) bleiben hierbei erhalten.

Die Lösungsansätze (35) kommen zur Anwendung, weil sie, wie es aus Abschn. 3.13 zu ersehen ist, für die hier in Frage kommenden Querschnittsformen (Rechteck- und I-Querschnitten) ausreichend genaue Ergebnisse liefern. Für flächenartige Träger gilt Abschnitt 3.22.

ψ ergibt sich aus Gl. (32)

$$\psi = \frac{2}{\pi f} (l a_1 - e c_1) \quad (81)$$

An Stelle der Gl. (33) schreibt man

$$M_{x,k} = P a + \frac{P}{2} (z l - z^2) \quad (82)$$

Analog dem im Abschn. 3.11 behandelten Fall lässt sich aus dem energetischen Indifferenzkriterium (14) die gesuchte Kippbedingung ableiten, die lautet

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (83)$$

Dabei bedeuten

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{\pi^4}{2l^3} EJ_Y - \frac{4}{\pi^2} \frac{p_k l^3}{f} - \frac{\pi^2}{2} P_k l \\ K_{12} = K_{21} &= -\frac{\pi^4}{2l^2} EJ_Y \gamma_M + \left(\frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{8} \right) p_k l^2 + \frac{4}{\pi^2} p_k l^2 \frac{e}{f} + \\ &\quad + \frac{\pi^2}{2} P_k a \\ K_{22} &= \frac{\pi^4}{2l^3} (EC_M + EJ_Y \gamma_M^2) + \frac{\pi^2}{2l} GJ_t - \frac{1}{2} p_k l e - \\ &\quad - \left(\frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{8} \right) p_k l r_x - \frac{4}{\pi^2} p_k l \frac{e^2}{f} - \frac{\pi^2}{2} \frac{P_k}{l} l_p^2 \\ &\quad - \frac{\pi^2}{2} \frac{P_k a}{l} r_x \end{aligned}$$

Mit den K-Werten erhält man die gesuchte Kippgleichung

$$\begin{aligned} &-24,352 P_k^2 (l_p^2 + r_x a - a^2) - P_k p_k l^2 (1,412 r_x - 5,292 a \\ &+ 2,467 e + 2 \frac{l_p^2}{f} + \frac{2 a r_x}{f} + \frac{2 e^2}{f} - \frac{4 a e}{f}) + p_k^2 l^4 \cdot \\ &\cdot \left\{ 0,287 + 0,232 \left(\frac{e}{f} - \frac{r_x}{2f} \right) \right\} + 24,352 P_k \left\{ GJ_t + \right. \\ &+ \frac{9,870}{l^2} [EC_M + EJ_Y (\gamma_M^2 + l_p^2 + r_x a - 2 \gamma_M a)] \left. \right\} + \\ &+ p_k l \frac{EJ_Y}{l} \left\{ 13,940 r_x + 24,352 e - 52,231 \gamma_M + \right. \\ &+ \frac{19,739}{f} (e^2 - 2 \gamma_M e + \gamma_M^2) + \frac{19,739}{f} \frac{EC_M}{EJ_Y} + \\ &+ \frac{2 l^2}{f} \frac{GJ_t}{EJ_Y} \left. \right\} - (2372,13 EC_M EJ_Y / l^4 + \\ &+ 240,35 GJ_t EJ_Y / l^2) = 0 \quad (84) \end{aligned}$$

3.22 Sonderfall $EI_y = \infty$

Unter Anwendung des Lösungsansatzes (48) erhält man, wie zuvor aus dem energetischen Indifferenzkriterium (24), folgende Kippbedingung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (85)$$

Dabei bedeuten

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{\pi^2}{2} \frac{GJ_t}{l} + \frac{\pi^4}{2} \frac{EC_M}{l^3} + \left(\frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{8} \right) (r_x - 2\gamma_M) \bar{P}_k l - \\ &\quad - \bar{P}_k \frac{l \bar{d}}{2} - \frac{4}{\pi^2} \bar{P}_k \frac{l \bar{d}^2}{f} - \frac{\pi^2}{2l} (\dot{\varphi}_p^2 + \gamma_M^2) \bar{P}_k + \\ &\quad + \frac{\pi^2}{2l} (r_x - 2\gamma_M) \bar{P}_k \bar{\alpha} \quad , \\ K_{12} = K_{21} &= -\frac{15}{32} (r_x - 2\gamma_M) \bar{P}_k l - \frac{4}{3\pi^2} \bar{P}_k \frac{l \bar{d}^2}{f} \quad , \\ K_{13} = K_{31} &= -\frac{65}{288} (r_x - 2\gamma_M) \bar{P}_k l - \frac{4}{5\pi^2} \bar{P}_k \frac{l \bar{d}^2}{f} \quad , \\ K_{22} &= \frac{9\pi^2}{2} \frac{GJ_t}{l} + \frac{81\pi^4}{2} \frac{EC_M}{l^3} + \left(\frac{3\pi^2}{8} - \frac{1}{8} \right) (r_x - 2\gamma_M) \bar{P}_k l - \\ &\quad - \bar{P}_k \frac{l \bar{d}}{2} - \frac{4}{9\pi^2} \bar{P}_k \frac{l \bar{d}^2}{f} - \frac{9\pi^2}{2l} (\dot{\varphi}_p^2 + \gamma_M^2) \bar{P}_k + \\ &\quad + \frac{9\pi^2}{2l} (r_x - 2\gamma_M) \bar{P}_k \bar{\alpha} \quad , \\ K_{23} = K_{32} &= -\frac{255}{128} (r_x - 2\gamma_M) \bar{P}_k l - \frac{4}{15\pi^2} \bar{P}_k \frac{l \bar{d}^2}{f} \quad , \\ K_{33} &= \frac{25\pi^2}{2} \frac{GJ_t}{l} + \frac{625\pi^4}{2} \frac{EC_M}{l^3} + \left(\frac{25\pi^2}{24} - \frac{1}{8} \right) (r_x - 2\gamma_M) \bar{P}_k l - \\ &\quad - \bar{P}_k \frac{l \bar{d}}{2} - \frac{4}{25\pi^2} \bar{P}_k \frac{l \bar{d}^2}{f} - \frac{25\pi^2}{2l} (\dot{\varphi}_p^2 + \gamma_M^2) \bar{P}_k + \\ &\quad + \frac{25\pi^2}{2l} (r_x - 2\gamma_M) \bar{P}_k \bar{\alpha} \quad . \end{aligned}$$

Wird der zweigliedrige Lösungsansatz (52) herangezogen, so lässt sich, wie zuvor die Kippbedingung, in einer geschlossenen Form wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} & \bar{P}_k^2 \left[\frac{219,170}{l^2} \{ (i_p^2 + \chi_M^2) - a(\gamma_x - 2\chi_M) \}^2 \right] + (\bar{P}_k l)^2 \cdot \\ & \cdot \left\{ 0,804 (\gamma_x - 2\chi_M)^2 - 1,931 (\gamma_x - 2\chi_M) \bar{d} + 0,250 \bar{d}^2 - \right. \\ & - 1,589 (\gamma_x - 2\chi_M) \frac{\bar{d}^2}{f} + 0,225 \frac{\bar{d}^3}{f} \left. \right\} + \bar{P}_k \cdot \bar{P}_k l \cdot \\ & \cdot \left\{ - \frac{30,359}{l} (i_p^2 + \chi_M^2) (\gamma_x - 2\chi_M) + 24,674 \frac{\bar{d}}{l} (i_p^2 + \chi_M^2) + \right. \\ & + 30,359 \frac{\bar{a}}{l} (\gamma_x - 2\chi_M)^2 - 24,674 \frac{\bar{a} \cdot \bar{d}}{l} (\gamma_x - 2\chi_M) + \\ & + 18,222 \frac{\bar{d}^2}{lf} (i_p^2 + \chi_M^2) - 18,222 \frac{\bar{d}^2 \cdot \bar{a}}{lf} (\gamma_x - 2\chi_M) \left. \right\} + \\ & + \bar{P}_k \left\{ - 438,341 \frac{GJ_t}{l^2} (i_p^2 + \chi_M^2) + 438,341 \frac{GJ_t}{l^2} \bar{a} (\gamma_x - 2\chi_M) - \right. \\ & - 21631,21 \frac{EC_M}{l^4} (i_p^2 + \chi_M^2) + 21631,21 \frac{EC_M}{l^4} \bar{a} (\gamma_x - 2\chi_M) \left. \right\} + \\ & + \bar{P}_k l \left\{ + 30,359 (\gamma_x - 2\chi_M) \frac{GJ_t}{l} + 1303,351 (\gamma_x - 2\chi_M) \frac{EC_M}{l^3} - \right. \\ & - 24,674 \bar{d} \frac{GJ_t}{l} - 1996,885 \bar{d} \frac{EC_M}{l^3} - 18,222 \frac{\bar{d}^2}{f} \frac{GJ_t}{l} - \\ & - 1601,068 \frac{\bar{d}^2}{f} \frac{EC_M}{l^3} \left. \right\} + 219,17 \left(\frac{GJ_t}{l} \right)^2 + \\ & + 21631,21 \frac{GJ_t}{l} \cdot \frac{EC_M}{l^3} + 192146,30 \left(\frac{EC_M}{l^3} \right)^2 = 0 \quad . \end{aligned}$$

(86)

3.23 DUNKERLY'sche Formel

Die Formel von DUNKERLY gilt für die Zusammensetzung von Teilsystemen, die alle die gleiche Steifigkeit, aber verschiedene Belastungen haben. Z.B. kann man die gesamten äusseren Kräfte des Gesamtproblems aus den Kräften dreier Teilprobleme zusammensetzen (Bild 16).

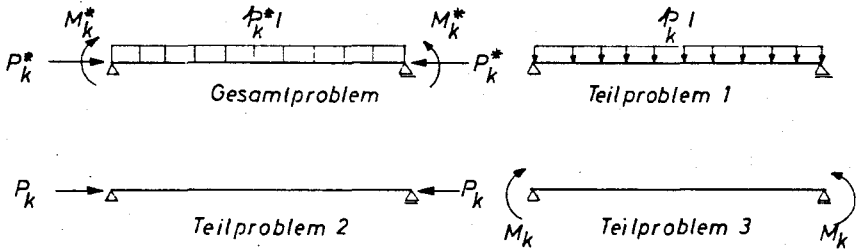


Bild 16 Zusammensetzung von Teilsystemen

Bezeichnet man die kritischen Grössen des Gesamtproblems mit p_k^* , P_k^* und M_k^* , d.h. wenn alle Lastgrössen zusammenwirken, dann gilt nach [3]

$$\frac{p_k^* l}{p_k l} + \frac{P_k^*}{P_k} + \frac{M_k^*}{M_k} \geq 1, \quad (87)$$

wobei p_k , P_k , M_k die kritischen Grössen der Teilprobleme bedeuten.

Setzt man die Verhältnisse

$$\frac{P_k^*}{p_k^* l} = \frac{P}{p l} = \alpha, \quad \frac{M_k^*}{p_k^* l^2} = \frac{M}{p l^2} = \beta$$

als gegeben voraus, dann nimmt die Beziehung (87) die folgende Form an:

$$\frac{1}{p_k l} + \frac{\alpha}{P_k} + \frac{\beta l}{M_k} \geq \frac{1}{p_k^* l}. \quad (88)$$

Die bekannte DUNKERLY'sche Formel wird erhalten, wenn die beiden Seiten der Gl. (88) gleichgesetzt wird.

$$\frac{1}{\tilde{p}_k^* l} = \frac{1}{p_k^* l} + \frac{1}{P/\alpha} + \frac{1}{M_k/\beta l} \quad , \quad (89)$$

wobei $\tilde{p}_k^* l \leq p_k^* l$.

Der Näherungswert $\tilde{p}_k^* l$ ist stets kleiner als die wahre Grösse $p_k^* l$, wenn nur positive Eigenwerte betrachtet werden. Bei 2 Teilproblemen kann die DUNKERLY'sche Formel mit einer Geraden dargestellt werden.

Zahlenrechnungen zeigen, dass sich \tilde{p}_k^* nur wenig von p_k^* unterscheidet (vergl. Beispiel 2).

Durch Anwendung der DUNKERLY'schen Formel (89) wird der Rechenaufwand wesentlich verringert.

1. Aufgehängte Träger mit Endscheiben an den Stirnflächen

$$(\beta = 1, \beta_0 = 0,5)$$

1.1 Gleichmässig verteilte Querlast

1.1.1 Ableitung der Kippgleichungen

Es wird vorausgesetzt, dass durch die starren Endscheiben die Verwölbung des Endquerschnittes in Richtung der Trägerachse vollkommen behindert ist, während eine seitliche Verdrehung der Endtangente an die Biegelinie $u(z)$ voll möglich ist.

Die zugehörigen Randbedingungen lauten für die beiden Endquerschnitte ($z = 0, z = 1$)

$$\begin{aligned} u_{s_0} &= -(f + e) \psi, & \varphi_0 &= -\psi \\ u_{t_0} &= \chi_M \varphi_0'', & \varphi_0' &= 0 \end{aligned} \quad (90)$$

Die Randbedingungen (90) sind von den folgenden Lösungsansätzen erfüllt:

$$\begin{aligned} u_{s_0}(z) &= \left(\sum_{n=1}^l a_n \sin \frac{n\pi z}{l} - \frac{2}{\pi} \chi_M \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \sum_{m=1}^g m^2 c_m - \right. \\ &\quad \left. - (f + e) \psi \right), \end{aligned}$$

$$\varphi_0(z) = \sum_{m=1}^g c_m \sin^2 \frac{m\pi z}{l} - \psi. \quad (91)$$

1) Die Verwölbung des Querschnittes beträgt $w^*(z) = -\varphi'(z) \int_0^s r_t ds$
wobei $\int_0^s r_t ds$ die Einheitsverwölbung darstellt.
Wenn $w^*(z=0) = 0$ folgt dann $\varphi'(z=0) = 0$ [1].

Zunächst wähle man

$$\begin{aligned} u_5(z) &= l a_1 \sin \frac{\pi z}{l} + l a_3 \sin \frac{3\pi z}{l} - \\ &\quad - c_1 \pi^2 \gamma_M \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right) - 9 c_3 \pi^2 \gamma_M \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right), \\ \varphi(z) &= c_1 \sin^2 \frac{\pi z}{l} + c_3 \sin^2 \frac{3\pi z}{l}. \end{aligned} \quad (92)$$

Mit den Ansätzen (92) erhält man aus (14) die Kippbedingung

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (93)$$

Dabei bedeuten

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{\pi^4}{2} \frac{EJ_y}{l} - \frac{4}{\pi^2} p l^3 / f, \\ K_{12} = K_{21} &= - \frac{16\pi^3}{3} \frac{EJ_y}{l^2} \gamma_M + \frac{40}{27\pi} p l^2 + \frac{\pi}{3} p l^2 \frac{\gamma_M}{f} + \frac{1}{\pi} p l^2 \frac{e}{f}, \\ K_{13} = K_{31} &= - \frac{4}{3\pi^2} p l^3 / f, \\ K_{14} = K_{41} &= - \left(36\pi^3 + \frac{36}{35} \pi^3 \right) \frac{EJ_y \gamma_M}{l^2} + \left(\frac{251}{250} - \frac{1}{686} \right) \frac{p l^2}{\pi} + \\ &\quad + 3\pi p l^2 \frac{\gamma_M}{f} + \frac{1}{\pi} p l^2 \frac{e}{f}, \\ K_{22} &= \frac{2\pi^4}{l^3} (EC_M + EJ_y \gamma_M^2) + 4 \frac{\pi^4}{l^3} EJ_y \gamma_M^2 + \frac{\pi^2}{2l} GJ_t - \\ &\quad - \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \right) p l \gamma_M - \left(\frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{32} \right) p l r_x - \frac{3}{8} p l e - \\ &\quad - \frac{\pi^4}{36} p l \frac{\gamma_M^2}{f} - \frac{1}{4} p l \frac{e^2}{f} - \frac{\pi^2}{6} p l \gamma_M \frac{e}{f}, \end{aligned}$$

$$K_{23} = K_{32} = \frac{48\pi^3}{5} \frac{EJ_y \gamma_M}{l^2} - \left(\frac{225}{54\pi} + \frac{9}{250\pi} \right) p_k l^2 + \frac{\pi}{9} p_k l^2 \frac{\gamma_M}{f} + \frac{1}{3\pi} p_k l^2 \frac{e}{f},$$

$$K_{24} = K_{42} = 36\pi^4 \frac{EJ_y \gamma_M^2}{l^3} - \left(\frac{5\pi^2}{6} + \frac{41}{18} \right) p_k l \gamma_M + \frac{9}{32} p_k l r_x - \frac{1}{4} p_k l e - \frac{\pi^4}{4} p_k l \frac{\gamma_M^2}{f} - \frac{5\pi^2}{6} p_k l \gamma_M \frac{e}{f} - \frac{1}{4} p_k l \frac{e^2}{f},$$

$$K_{33} = \frac{81\pi^4}{2} \frac{EJ_y}{l} - \frac{4}{9\pi^2} \frac{p_k l^3}{f},$$

$$K_{34} = K_{43} = -144\pi^3 \frac{EJ_y \gamma_M}{l^2} + \frac{40}{81\pi} p_k l^2 + \pi p_k l^2 \frac{\gamma_M}{f} + \frac{1}{3\pi} p_k l^2 \frac{e}{f},$$

$$K_{44} = (EC_M + EJ_y \gamma_M^2) \frac{81\pi^4}{l^3} + 324\pi^4 \frac{EJ_y \gamma_M^2}{l^3} + \frac{9\pi^2}{2l} GJ_t - \left(\frac{3\pi^2}{2} + \frac{1}{2} \right) p_k l \gamma_M - \frac{3}{8} p_k l e - \left(\frac{3\pi^2}{8} + \frac{9}{288} \right) p_k l r_x - \frac{9\pi^4}{4} p_k l \frac{\gamma_M^2}{f} - \frac{1}{4} p_k l \frac{e^2}{f} - \frac{3\pi^2}{2} p_k l \gamma_M \frac{e}{f}.$$

Sonderfall: Rechteckquerschnitt bei Gabellagerung
mit Endscheiben

Die Kipplast eines mit Endscheiben versehenen, gabelgelagerten Balkens mit einem Rechteckquerschnitt lässt sich in einfacher Form angeben, weil die Größen y_M , r_x , C_M , $1/f$ verschwinden müssen, Ferner wird angenommen, dass die Last im Querschnittsschwerpunkt angreift ($e = 0$).

Die Kipplast ergibt sich zu

$$p_k l^3 = 30,73 \sqrt{E J_y G J_t} \quad (94)$$

Vereinfacht man die Ansatzfunktionen (92) zu

$$\begin{aligned} u_5(z) &= l a_1 \sin \frac{\pi z}{l} + l a_3 \sin \frac{3\pi z}{l} \\ &\quad - C_1 \pi^2 y_M \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right), \\ \varphi(z) &= C_1 \sin^2 \frac{\pi z}{l}, \end{aligned} \quad (95)$$

dann lässt sich die Kippbedingung in folgender Form schreiben:

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (96)$$

Die K-Werte haben die gleiche Bedeutung wie in (93).

1. Sonderfall: Gabellagerung ($f = \infty$) mit Endscheiben

$$\begin{aligned} 0,2445 p_k l^6 + p_k l^2 E J_y (21,5509 r_x + 18,2642 e - \\ - 61,3280 y_M) - (9488,53 E C_M E J_y / l^2 + \\ + 240,35 G J_t E J_y + 25,56 E J_y E J_y y_M^2 / l^2) = 0. \end{aligned} \quad (97)$$

2. Sonderfall: Rechteckquerschnitt bei Gabellagerung mit Endscheiben.

$$p_k l^3 = 31,35 \sqrt{E J_y G J_t} \quad (98)$$

Werden der Auswertung von (14) die Ansätze

$$\begin{aligned} u_s(z) &= \left[a_1 \sin \frac{\pi z}{l} - c_1 \pi^2 y_M \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right) - \right. \\ &\quad \left. - 9 c_3 \pi^2 y_M \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \right] ; \\ \varphi(z) &= c_1 \sin^2 \frac{\pi z}{l} + c_3 \sin^2 \frac{3\pi z}{l} \end{aligned} \quad (99)$$

zugrunde gelegt, so lässt sich die Kippbedingung aus (93) erhalten, indem man die 3. Zeile und 3. Reihe der Determinante (93) durchstreichen,

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{24} \\ K_{41} & K_{42} & K_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (100)$$

Die K-Werte haben die gleiche Bedeutung wie in (93).

Sonderfall: Rechteckquerschnitt bei Gabellagerung mit Endscheiben.

Wie zuvor nimmt die Kippgleichung die übliche Form für Rechteckquerschnitte an

$$p_k l^3 = 32,07 \sqrt{E J_y G J_t} \quad (101)$$

Schliesslich wähle man den dreigliedrigen Ansatz für u_s , jedoch den eingliedrigen Ansatz für φ

$$\begin{aligned}
 u_5(z) &= l a_1 \sin \frac{\pi z}{l} + l a_3 \sin \frac{3\pi z}{l} + \\
 &\quad + l a_5 \sin \frac{5\pi z}{l} - c_1 \pi^2 \gamma_M \frac{z}{l} (1 - z/l), \\
 \varphi(z) &= c_1 \sin^2 \frac{\pi z}{l}. \quad (102)
 \end{aligned}$$

Damit erhält man die Kippbedingung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{35} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{55} \end{vmatrix} = 0. \quad (103)$$

Die K-Werte haben die gleiche Bedeutung wie in (93).

Ferner bedeuten

$$\begin{aligned}
 K_{15} &= K_{51} = -\frac{4}{5\pi^2} \frac{P_k l^3}{f}, \\
 K_{25} &= K_{52} = +\frac{80}{21} \pi^3 \frac{E J_y \gamma_M}{l^2} + \frac{P_k l^2}{\pi} \left(\frac{1}{5} - \frac{25}{54} - \frac{25}{686} \right) + \\
 &\quad + \frac{\pi}{15} \frac{P_k l^2 \gamma_M}{f} + \frac{1}{5\pi} \frac{P_k l^2 e}{f}, \\
 K_{35} &= K_{53} = -\frac{4}{15\pi^2} \frac{P_k l^3}{f}, \\
 K_{55} &= \frac{625}{2} \pi^4 \frac{E J_y}{l} - \frac{4}{25\pi^2} \frac{P_k l^3}{f}.
 \end{aligned}$$

1. Sonderfall: Gabellagerung mit Endscheiben ($f = \infty$)

Es gelingt hierfür, die Kippbedingung (103) in einer geschlossenen Form anzugeben. Die Kippgleichung lautet dann

$$\begin{aligned}
 0,2445 \frac{P_k^2 l^6}{E J_y} + \frac{P_k l^2 E J_y}{\gamma_M^2} (21,5509 r_x + 18,2642 e - 61,3641 \gamma_M) \\
 - (9488,53 E C_M E J_y / l^2 + 240,35 G J_T E J_y + \\
 + 3,24 E J_y E J_y \gamma_M^2 / l^2) = 0. \quad (104)
 \end{aligned}$$

**2. Sonderfall: Rechteckquerschnitt bei Gabellagerung
mit Endscheiben**

Die Kippgleichung wird zu

$$p_k l^3 = 31,35 \sqrt{EJ_y GJ_t} \quad (105)$$

Mit den relativ einfachen Lösungsansätzen

$$\begin{aligned} u_s(z) &= l a_1 \sin \frac{\pi z}{L} - c_1 \pi^2 \gamma_M \frac{z}{L} \left(1 - \frac{z}{L}\right) \\ \varphi(z) &= c_1 \sin^2 \frac{\pi z}{L} \end{aligned} \quad (106)$$

lässt sich die Kippbedingung

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (107)$$

in einer geschlossenen Form wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} p_k^2 l^6 & \left(0,2224 + 0,1183 \frac{\gamma_M}{f} + 0,1482 \frac{e}{f} - 0,1793 \frac{r_x}{f} \right) \\ & + p_k^2 l^2 EJ_y \left(21,5509 r_x + 18,2642 e - 51,4975 \gamma_M + \right. \\ & + 12,1761 \frac{e^2}{f} - 25,1614 \frac{e \gamma_M}{f} + 22,3121 \frac{\gamma_M^2}{f} + \\ & + 78,9568 EC_M/EJ_y f + 20000 \frac{l^2}{f} GJ_t/EJ_y \left. \right) - \\ & - \left(9488,53 EC_M EJ_y / l^2 + 240,35 GJ_t EJ_y + \right. \\ & + 1119,43 EJ_y EJ_y \gamma_M^2 / l^2 \left. \right) = 0 \quad (108) \end{aligned}$$

1. Sonderfall: Gabellagerung mit Endscheiben ($f = \infty$)

$$0,2224 p_k^2 l^6 + p_k l^2 E J_y (21,5509 r_x + 18,2642 e - 51,4975 y_M) - (9488,53 E C_M E J_y / l^2 + 240,35 G J_t E J_y + 1119,43 E J_y E J_y y_M^2 / l^2) = 0 \quad (109)$$

2. Sonderfall: Rechteckquerschnitt bei Gabellagerung mit Endscheiben

$$p_k l^3 = 32,87 \sqrt{E J_y G J_t} \quad (110)$$

Nachfolgend wird gezeigt, inwieweit die Kipplast beeinflusst werden kann, wenn die Lösungsansätze nur die geometrischen Randbedingungen befriedigen. Hierzu wähle man

$$\begin{aligned} u_s(z) &= l a_1 \sin \frac{\pi z}{l} \\ \varphi(z) &= c_1 \sin \frac{\pi z}{l} \end{aligned} \quad (111)$$

Hierbei kann die dynamische Randbedingung $u_{so}'' = y_M \varphi''$ nicht erfüllt werden.

Mit den Ansätzen (111) erhält man als Kippgleichung

$$\begin{aligned} p_k^2 l^6 (0,2224 + 0,1482 \frac{e}{f} - 0,1793 \frac{r_x}{f}) + \\ + p_k l^2 E J_y (21,5509 r_x + 18,2642 e - 38,9910 y_M + \\ + 12,1761 \frac{e^2}{f} - 26,3189 \frac{e y_M}{f} + 78,9568 \frac{y_M^2}{f} + \\ + 78,9568 \frac{E C_M}{E J_y f} + 20 \frac{l^2}{f} \frac{G J_t}{E J_y}) - (9488,53 E C_M E J_y / l^2 + \\ + 240,35 G J_t E J_y + 7779,40 E J_y E J_y y_M^2 / l^2) = 0 \quad (112) \end{aligned}$$

Für den Fall, dass Schubmittelpunkt und Schwerpunkt zusammenfallen (d.h. : $y_M = 0$), stimmt Gl. (112) mit Gl. (108) selbstverständlich vollkommen überein.

Sonderfall: Gabellagerung mit Endscheiben ($f = \infty$)

$$0,2224 p_k L^6 + p_k L^2 E J_y (21,5509 r_y + 18,2642 e - 38,9910 \chi_M) - (9488,53 \frac{E C_M E J_y}{L^2} + 240,35 G J_t E J_y + 7779,40 E J_y E J_y \chi_M^2 / L^2) = 0 \quad (113)$$

4.12 Genauigkeitsbetrachtungen

Die Genauigkeit der gewonnenen Lösungen wird getrennt für verschiedene Querschnittsformen untersucht, weil die Querschnittsgestalt einen ausschlaggebenden Einfluss auf die Konvergenz der Lösung hat.

Zunächst wird ein Balken mit einem Rechteckquerschnitt, unter der Wirkung einer im Schwerpunkt angreifenden Querlast, betrachtet.

Bei Gabellagerung mit Endscheiben lässt sich die Kippgleichung für den betrachteten Balken in der allgemeinen Form

$$p_k L^3 = \alpha \sqrt{E J_y G J_t} \quad (114)$$

schreiben.

Die α - Werte nach den verschiedenen Lösungsansätzen sind in Tafel V angegeben.

Gl. (114) lässt sich für doppelt-symmetrischen Querschnitt unter Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung erweitern. Die Kippgleichung lautet dann

$$p_k L^3 = \alpha \sqrt{(\beta E C_M / L^2 + G J_t) E J_y} \quad (115)$$

Die α - und β - Werte sind in Tafel VI wiedergegeben.

Aus den Tafeln V und VI erkennt man, dass die Abweichung im praktischen Bereich liegt.

Bei einfach-symmetrischen I-Querschnitten ist zu unterscheiden, ob der Schubmittelpunkt M ober- oder unterhalb des Schwerpunktes S liegt. Zahlenrechnungen (vergl. Beispiel 5) zeigen, dass im ersten Fall (M über S) das Verfahren sehr gut konvergiert. Mit dem einfachen Ansatz (106) sogar (111) erhält man praktisch ein genaues Ergebnis. Daher ist es zweckmässig, die Kipplast aus Gl. (108) zu bestimmen. Bei gabelgelagerten Balken mit Endscheiben empfiehlt

Tafel V

	Ansatz	α	Abbruchfehler in %
106	$u_s(z) = l a_1 \sin \frac{\pi z}{l} - c_1 \pi^2 \chi_M \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right)$ $\varphi(z) = c_1 \sin^2 \frac{\pi z}{l}$	32,87	6,96
99	$u_s(z) = l a_1 \sin \frac{\pi z}{l} - c_1 \pi^2 \chi_M \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right) - 9 c_3 \pi^2 \chi_M \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right)$ $\varphi(z) = c_1 \sin^2 \frac{\pi z}{l} + c_3 \sin^2 \frac{3\pi z}{l}$	32,07	4,36
95	$u_s(z) = l a_1 \sin \frac{\pi z}{l} + l a_3 \sin \frac{3\pi z}{l} - c_1 \pi^2 \chi_M \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right)$ $\varphi(z) = c_1 \sin^2 \frac{\pi z}{l}$	31,35	2,17
102	$u_s(z) = l a_1 \sin \frac{\pi z}{l} + l a_3 \sin \frac{3\pi z}{l} + l a_5 \sin \frac{5\pi z}{l} - c_1 \pi^2 \chi_M \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right)$ $\varphi(z) = c_1 \sin^2 \frac{\pi z}{l}$	31,35	2,17
92	$u_s(z) = l a_1 \sin \frac{\pi z}{l} + l a_3 \sin \frac{3\pi z}{l} - c_1 \pi^2 \chi_M \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right) - 9 c_3 \pi^2 \chi_M \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right)$ $\varphi(z) = c_1 \sin^2 \frac{\pi z}{l} + c_3 \sin^2 \frac{3\pi z}{l}$	30,73	0

T a f e l V I

Ansatz	α	β
106	32,87	39,48
95	31,35	39,48
102	31,35	39,48

sich jedoch, die Kipplast aus Gl. (104) zu bestimmen, weil ohne mehr Rechenaufwand ein genaueres Ergebnis erzielt werden kann.

Im anderen Fall (M unter S) ergeben sich andere Verhältnisse. Die Abweichung zwischen den gewonnenen Lösungen kann beträchtlich gross sein. Der Ansatz (111), bei dem nur die geometrischen Randbedingungen erfüllt sind, liefert für diesen Fall ein unbrauchbares Ergebnis. Der Abbruchfehler kann ca. 50 % betragen. (Vergl. Beispiel 5). Es belibt hierin nichts übrig, als die Kipplast aus der Kippbedingung (96) zu ermitteln. Zahlenrechnungen zeigen ferner, dass der Genauigkeitsgrad nur gering gesteigert werden kann, wenn die kritische Last aus der Kippbedingung (93) bestimmt wird. Dabei aber wächst der Rechenaufwand erheblich an.

Bei gabelgelagerten Balken mit Endscheiben kann die Kipplast mit ausreichender Genauigkeit aus der relativ einfachen Gl. (104) berechnet werden.

Nun kann man folgende Schlussfolgerungen ziehen:

Für Gabellagerung mit Endscheiben ($\beta = 1$, $\beta = 0,5$) steht die geschlossene Lösung (114), aus der die Kipplast beider Fälle (M über oder unter S) genau ermittelt werden kann, zur Verfügung.

Liegt hingegen der allgemeine Fall ($f \neq \infty$) vor, dann muss die kritische Last aus (96) bestimmt werden. Und nur dann, wenn M oberhalb S liegt, darf die Kipplast aus Gl. (108) ermittelt werden.

Die Bestimmung der Kipplast aufgehängter, flächenartiger Träger mit Endscheiben ist aus folgenden Gründen mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden:

- 1) Hier kann kein Gebrauch gemacht werden von der Vereinfachung, dass $EI_y = \infty$ angesetzt werden darf, weil bei $\beta = 1$, $\beta_0 = 0,5$ verschiedene Lösungsansätze für u und φ verwendet werden müssen.
- 2) Abgesehen von gewissen Ungenauigkeiten, sind die Kippbedingungen (93), (96), (100) und (103) für die Berechnung der Kipplast nicht geeignet, weil es sich um kleine Differenz grosser Zahlen handelt.

Wie bereits gezeigt wurde, gelang es, einige geschlossene Lösungen für die gabelgelagerten Träger mit Endscheiben abzuleiten. Man kann diese Lösungen derart überprüfen, dass die den Randbedingungen $\beta = 1$, $\beta_0 = 0,5$ zugehörige Kipplast, zwischen zwei Grenzwerten liegen muss. Der untere Grenzwert ergibt sich bei freier Einspannung und Verwölbung der Randquerschnitte ($\beta = \beta_0 = 1$), während der obere Grenzwert bei voller seitlicher Einspannung und Verwölbungsbehinderung der Endquerschnitte ($\beta = \beta_0 = 0,5$) auftritt. Trotz der unterschiedlichen Lagerungsarten, besitzen die erwähnten Kippgleichungen den gleichen Aufbau. Sie lassen sich in der allgemeinen Form wie folgt schreiben:

$$F_1 \frac{k^2 l^6}{EJ_y} + p l^2 (F_2 r_x + F_3 e - F_4 \gamma_M) - (F_5 \frac{EC_M}{l^2} + F_6 GJ_t + F_7 \frac{EJ_y \gamma_M^2}{l^2}) = 0. \quad (116)$$

Die F-Werte sind in Tafel VII eingetragen.

T a f e l VII

Randbe- dingung	Gl.	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	F ₇
$\beta = 1$, $\beta_0 = 0,5$	(113)	0,2224	21,5509	18,2642	38,9910	9488,53	240,35	7779,40
	(109)	0,2224	"	"	51,4975	"	"	1119,43
	(97)	0,2445	"	"	61,3280	"	"	25,56
	(104)	0,2445	"	"	61,3641	"	"	3,24
$\beta = \beta_0 = 0,5$	(123)	0,0992	"	"	61,3661	"	"	0

Wie später gezeigt wird, liefert Gl. (123) ⁺ einen genügend genauen Wert für die Kipplast bei der Lagerungsbedingung $\beta = \beta_0 = 0,5$. Damit ist die obere Grenze für die Kipplast festgelegt.

Durch den Vergleich der obigen F-Werte lässt sich feststellen, dass sich F_2 bis F_6 mit der Ausnahme F_4 in den ersten zwei Gleichungen nicht ändern. F_1 ist in der ersten Linie vom Grad der seitlichen Einspannung der Endquerschnitte. Es dürfte angenommen werden, dass F_1 bei $\beta = 1$, $\beta_0 = 0,5$ keine wesentliche Änderung von 0,2445 erfährt, weil F_1 bei $\beta = \beta_0 = 1$ den maximalen Wert 0,2875 nicht überschreiten kann. Das erste Glied, das F_1 enthält, spielt bei flächenartigen Trägern eine untergeordnete Rolle und beeinflusst kaum das Endergebnis, weil die relativ grosse Ely im Nenner erscheint.

Abschliessend muss F_7 näher betrachtet werden, weil F_7 einen entscheidenden Einfluss auf die Kipplast ausübt. Aus Tafel VII erkennt man sofort, dass sich F_7 um so mehr dem Grenzwert Null nähert, je mehr Vorzeichen a_k herangezogen werden. Dies lässt sich auch durch Gl. (123) bestätigen, weil F_7 bei $\beta = \beta_0 = 0,5$ verschwindet.

Aufgrund dieser Überlegungen, dürfte die Kipplast eines Trägers bei den Randbedingungen $\beta = 1$, $\beta_0 = 0,5$ aus folgender Gleichung bestimmt werden:

$$0,244 p_k^2 l^6 + p_k l^2 E J_y (21,55 r_x + 18,26 e - 61,36 \chi_M) - (E J_y) (9488,53 E C_M / l^2 + 240,35 G J_t + 0) = 0 \quad (117)$$

Ferner unterscheidet sich Gl. (117) von Gl. (123)⁺⁺ nur durch das erste Glied. Da aber das Rechenergebnis nur gering von diesem Glied beeinflusst wird, kann man die Schlussfolgerung ziehen, dass Gl. (123)⁺⁺ bzw. die allgemeine Formel (122)⁺⁺ zur Bestimmung der Kipplast der aufgehängten, flächenartigen Träger mit Endscheiben angewendet werden darf.

+) siehe Abschn. 5.1

++) siehe Abschn. 5.1

4.2 Gleichmäßig verteilte Querlast und Angriff einer exzentrischen Normalkraft

In Anlehnung an die im Abschn. 3.21 ausgeführten Überlegungen behalten die Randbedingungen (93) ihre Gültigkeit bei.

Der Auswertung des energetischen Kriteriums (14) wird hier nur der Lösungsansatz (106) zugrunde gelegt, weil er für Balken mit I-Querschnitt, dessen Schubmittelpunkt über dem Schwerpunkt liegt, genügend genaues Ergebnis liefert. Bei flächenartigen Trägern kann man aufgrund der im Abschn. 4.12 gezogenen Schlussfolgerung die allgemeine Kippgleichung (122) bei den Randbedingungen $\beta = \beta_0 = 0,5$ für den vorliegenden Fall $\beta = 1$, $\beta_0 = 0,5$ anwenden.

Mit dem Ansatz (106) erhält man hierfür die folgende Kippgleichung:

$$\begin{aligned}
 & P_k^2 \left\{ \left(\frac{\pi^6}{6} - 16\pi^2 \right) \chi_M^2 + \frac{\pi^4}{4} i_p^2 - \frac{16\pi^2}{9} a^2 + \left(\pi^4 - \frac{32\pi^2}{3} \right) a y_M + \right. \\
 & \left. + \frac{\pi^4}{4} a r_x \right\} + P_k p_k^2 \left\{ \left(\frac{\pi^4}{12} + \frac{\pi^2}{4} - \frac{320}{27} \right) \chi_M + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{32} \right) r_x + \right. \\
 & \left. + \frac{3\pi^2}{16} e - \frac{320}{81} a + \left(\frac{\pi^6}{72} - \frac{4\pi^2}{3} \right) \frac{\chi_M^2}{f} + \frac{2i_p^2}{f} + \frac{\pi^2}{8} \frac{e^2}{f} + \right. \\
 & \left. + \left(8 - \frac{8\pi^2}{9} \right) \frac{a y_M}{f} + \frac{2a r_x}{f} + \left(\frac{\pi^4}{12} - 8 \right) \frac{e y_M}{f} - \frac{8}{3} \frac{e a}{f} \right\} + \\
 & + P_k^2 l^4 \left\{ - \frac{1600}{729\pi^2} + \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{26}{81} \right) \frac{\chi_M}{f} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8\pi^2} \right) \frac{r_x}{f} - \right. \\
 & \left. - \frac{74}{54\pi^2} \frac{e}{f} \right\} + P_k \frac{EJ_y}{l^2} \left\{ \left(-\frac{\pi^8}{6} - 3\pi^6 + \frac{128\pi^4}{3} \right) \chi_M^2 - \right. \\
 & \left. - \frac{\pi^6}{4} i_p^2 + \left(\frac{128\pi^4}{9} - \pi^6 \right) a \chi_M - \frac{\pi^6}{4} a r_x - \frac{\pi^6 EC_M}{EJ_y} - \right. \\
 & \left. - \frac{\pi^4}{4} \frac{GJ_t}{EJ_y} l^2 \right\} + P_k l \frac{EJ_y}{l} \left\{ \left(-\frac{\pi^6}{12} - \frac{\pi^4}{4} + \frac{1280\pi^2}{81} \right) \chi_M - \right. \\
 & \left. - \frac{\pi^4}{2} \left(\frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{32} \right) r_x - \frac{3\pi^4}{16} e + \left(-\frac{\pi^8}{72} - 24\pi^2 + \frac{32\pi^4}{9} \right) \frac{\chi_M^2}{f} + \right. \\
 & \left. + \left(-\frac{\pi^6}{6} + \frac{32\pi^2}{3} \right) \frac{e y_M}{f} - \frac{\pi^4}{8} \frac{e^2}{f} - \frac{8\pi^2}{f} \frac{EC_M}{EJ_y} - \frac{2l^2}{f} \frac{GJ_t}{EJ_y} \right\} \\
 & + \left\{ \frac{\pi^8}{l^4} EJ_y EC_M + \frac{\pi^6}{4l^2} EJ_y GJ_t + \left(3\pi^8 - \frac{256\pi^6}{9} \right) \cdot \right. \\
 & \left. \cdot \left(\frac{EJ_y}{l^2} \chi_M \right)^2 \right\} = 0. \quad (118)
 \end{aligned}$$

5. Aufgehängte Träger mit Endscheiben an den Stirnflächen

$$(\beta = \beta_0 = 0,5)$$

5.1 Allgemeiner Fall

Hier wird vorausgesetzt, dass durch die Endscheiben die Verwölbung des Endquerschnittes in Richtung der Trägerachse vollkommen behindert ist und die Trägerenden in Querrichtung starr eingespannt sind.

Es scheint, dass die angenommenen Randbedingungen für aufgehängte Träger nicht zutreffend sind, jedoch wie in Abschn. 4.12 gezeigt wurde, liefern die hier gewonnenen Lösungen sehr brauchbare Ergebnisse zur Schätzung der Kippsicherheit aufgehängter, flächenartiger Träger mit Endscheiben. Die zugehörigen Randbedingungen lauten für die beiden Endquerschnitte

$$(z = 0, z = l)$$

$$\begin{aligned} u_{s_0} &= -(f + e) \psi, \\ \varphi_0 &= -\psi, \\ u'_{s_0} &= 0, \\ \varphi'_0 &= 0. \end{aligned} \quad (119)$$

Diese Randbedingungen sind von den folgenden Lösungsansätzen erfüllt:

$$\begin{aligned} u_{s_0}(z) &= l \sum_{n=1}^i a_n \sin^2 \frac{n\pi z}{l} - (f + e) \psi, \\ \varphi_0(z) &= \sum_{m=1}^j c_m \sin^2 \frac{m\pi z}{l} - \psi. \end{aligned} \quad (120)$$

Mit den einfachen Lösungsansätzen

$$\begin{aligned} u_s(z) &= l a_1 \sin^2 \frac{\pi z}{l} \\ \varphi(z) &= c_1 \sin^2 \frac{\pi z}{l} \end{aligned} \quad (121)$$

erhält man aus (14) die folgende Kippgleichung:

$$\begin{aligned} &- 24,352 P_k^2 (i_p^2 + r_x a - a^2) - P_k p_l \{ +2,184 r_x \\ &- 6,218 a + 1,850 e + \frac{1,234}{f} (i_p^2 + e^2 + a r_x - 2ea) \} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + p_k^2 l^4 \left\{ 0,397 + 0,111 \left(\frac{2e}{f} - \frac{r_x}{f} \right) \right\} + 961,389 P_k \cdot \\
 & \cdot \left\{ 0,025 GJ_t + \frac{EC_M}{l^2} + \frac{EJ_y}{l^2} (\chi_M^2 + i_p^2 + r_x a - 2\chi_M a) \right\} \\
 & + p_k l \left\{ 97,409 \frac{EJ_y}{l} (0,885 r_x + 0,750 e - 2,520 \chi_M) \right. \\
 & + 48,705 EJ_y / l (e^2 - 2\chi_M e + \chi_M^2) + 48,705 \cdot \\
 & \cdot EJ_y / l \left(EC_M / EJ_y + 0,025 GJ_t l^2 / EJ_y \right) \left. \right\} - \\
 & - \left\{ 37954,13 EC_M EJ_y / l^4 + 961,39 EJ_y GJ_t / l^2 \right\} = 0 .
 \end{aligned}
 \tag{122}$$

Sonderfall: $P_k = 0$; $f = \infty$

Gl. (122) geht in die folgende Form über

$$\begin{aligned}
 & 0,099 p_k^2 l^6 + p_k l^2 EJ_y (21,551 r_x + 18,264 e - \\
 & - 61,366 \chi_M) - (9488,53 EC_M EJ_y / l^2 + \\
 & + 240,35 GJ_t EJ_y) = 0 .
 \end{aligned}
 \tag{123}$$

Für einen Balken mit Rechteckquerschnitt wird die Kippgleichung (123) zu

$$p_k l^3 = 49,22 \sqrt{EJ_y GJ_t} .
 \tag{124}$$

LEBELLE gibt in [12] ebenfalls aufgrund energetischer Betrachtungen den Beiwert 49,70 an.

5.2 Sonderfall: $EI_y = \infty$

Unter Anwendung des Lösungsansatzes

$$\varphi(z) = C_1 \sin^2 \frac{\pi z}{l} + C_3 \sin^2 \frac{3\pi z}{l}
 \tag{125}$$

erhält man wie zuvor aus (24) die folgende Kippgleichung, die sich nach Einsetzen der Zahlenwerte in der für den praktischen Gebrauch zweckmässigen Form wie folgt darstellen lässt:

$$\begin{aligned}
 & \bar{P}_k^2 \left[\frac{219,170}{l^2} \left\{ (i_p^2 + \gamma_M^2) - (r_x - 2\gamma_M) \bar{a} \right\}^2 \right] + \\
 & + \bar{P}_k \bar{P}_l \left\{ -\frac{38,070}{l} (r_x - 2\gamma_M) (i_p^2 + \gamma_M^2) + 18,505 \cdot \right. \\
 & \cdot \frac{\bar{d}}{l} (i_p^2 + \gamma_M^2) + 38,070 \frac{\bar{a}}{l} (r_x - 2\gamma_M)^2 - 18,505 \cdot \\
 & \cdot \frac{\bar{d} \bar{a}}{l} (r_x - 2\gamma_M) + 12,337 \frac{\bar{d}^2}{lf} (i_p^2 + \gamma_M^2) - \\
 & - 12,337 \frac{\bar{d}^2 \bar{a}}{lf} (r_x - 2\gamma_M) \left. \right\} + (\bar{P}_k)^2 \left\{ 1,646 \cdot \right. \\
 & \cdot (r_x - 2\gamma_M)^2 - 1,601 \bar{d} (r_x - 2\gamma_M) + 0,078 \bar{d}^2 - \\
 & - 1,079 (r_x - 2\gamma_M) \frac{\bar{d}}{f} + 0,062 \frac{\bar{d}^3}{f} \left. \right\} + \bar{P}_k \cdot \\
 & \cdot \left[219,170 \left\{ 2 \bar{a} \frac{GJ_t}{l^2} (r_x - 2\gamma_M) - \frac{2GJ_t}{l^2} (i_p^2 + \gamma_M^2) + \right. \right. \\
 & + 394,784 \bar{a} \frac{EC_M}{l^4} (r_x - 2\gamma_M) - 394,784 \frac{EC_M}{l^4} (i_p^2 + \gamma_M^2) \left. \right\} \left. \right] \\
 & + \bar{P}_l \left\{ + 38,070 (r_x - 2\gamma_M) \frac{GJ_t}{l} + 7709,597 \cdot \right. \\
 & \cdot (r_x - 2\gamma_M) \frac{EC_M}{l^3} - 18,505 \bar{d} \frac{GJ_t}{l} - 5990,659 \cdot \\
 & \cdot \bar{d} \frac{EC_M}{l^3} - 12,337 \frac{\bar{d}^2}{f} \frac{GJ_t}{l} - 3993,773 \cdot \\
 & \cdot \frac{\bar{d}^2}{f} \frac{EC_M}{l^3} \left. \right\} + \left\{ 219,170 \frac{GJ_t}{l} \cdot \frac{GJ_t}{l} + \right. \\
 & + 86524,83 \frac{GJ_t}{l} \cdot \frac{EC_M}{l^3} + 3074341,39 \cdot \\
 & \cdot \frac{EC_M}{l^3} \cdot \frac{EC_M}{l^3} \left. \right\} = 0 \quad (126)
 \end{aligned}$$

Sonderfall: $\bar{P}_k = 0$; $\bar{d} = 0$; $C_M = 0$

Hierfür wird Gl. (126) zu

$$\bar{P}_k l^2 = 10,83 \frac{G J_t}{2 \gamma_M - r_x} \quad (127)$$

Wird vereinfachend vom Lösungsansatz $\varphi = C_1 \sin^2 \frac{\pi x}{l}$ Gebrauch gemacht, so nimmt die zugehörige Kippgleichung sehr einfache Form wie folgt an:

$$\begin{aligned} \bar{P}_k l \left\{ \left(\frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{32} \right) (r_x - 2 \gamma_M) - \frac{3}{8} \bar{d} - \frac{\bar{d}^2}{4 f} \right\} - \\ - \bar{P}_k \left\{ \frac{\pi^2}{2 l} (i^2 + \gamma_M^2) - \frac{\pi^2}{2 l} (r_x - 2 \gamma_M) a \right\} + \\ + \frac{\pi^2}{2} G J_t / l + 2 \pi^4 E C_M / l^3 = 0 \end{aligned} \quad (128)$$

Sonderfall: $\bar{P}_k = 0$

$$\bar{P}_k l^2 = \frac{\frac{\pi^2}{2} G J_t + 2 \pi^4 E C_M / l^2}{\left(\pi^2 / 24 + 1 / 32 \right) (2 \gamma_M - r_x) + 3 / 8 \bar{d} + 1 / 4 \bar{d}^2 / f} \quad (129)$$

Unter den Annahmen $\bar{d} = 0$, $C_M = 0$ wird Gl. (129) zu

$$\bar{P}_k l^2 = 11,15 \frac{G J_t}{2 \gamma_M - r_x} \quad (130)$$

5.3 Genauigkeitsbetrachtungen

Wie bereits bekannt ist, liefert die eingliedrige Ansatzfunktion $\varphi = C_1 \sin^2 \frac{\pi x}{l}$ die strenge Lösung im Fall der exzentrischen Normalkraft. Es bleibt nur noch die Genauigkeit der gewonnenen Lösungen für den Fall Gleichlast zu untersuchen.

Sowohl für Balken mit Rechteckquerschnitt als auch für flächenartigen Träger, erweist sich der eingliedrige Ansatz zur Bestimmung der Kipplast als ausreichend genau. Bei flächenartigen Trägern beträgt die Abweichung zwischen den Lösungen (127) und (130) nur

$$\frac{11,15 - 10,83}{10,83} \cdot 100 = 3 \%$$

wenn der Lastangriffs- und Schubmittelpunkt zusammenfallen.

Abschliessend sei erwähnt, dass sämtliche in Abschn. 5.1 und 5.2 angegebenen Gleichungen angewendet werden dürfen, soweit von den Randbedingungen $\beta = \beta_0 = 0,5$ Gebrauch gemacht werden kann.

Wegen der Brauchbarkeit dieser Annahme ($\beta = \beta_0 = 0,5$) im Fall aufgehängter flächenartiger Träger sei auf Abschn. 4.12 hingewiesen.

5.4 Einfluss der Endscheiben auf die Kipplast

Die Steigerung der Kipplast eines an den Stirnflächen mit starren Endscheiben versehenen Trägers wird auf zweierlei Wirkungen zurückgeführt:

- 1) die Verwölbungsbehinderung der Endquerschnitte und
- 2) die evtl. seitliche Einspannung der Trägersränder um die y-Achse.

Die Steigerung der kritischen Last ist vor allem von der Querschnittsform abhängig, wie es aus Tafel VIII ersichtlich ist.

T a f e l VIII

Quer- schnitts- form	Gabellagerung $\beta = \beta_0 = 1$	Gabellagerung mit Endscheiben $\beta = 1, \beta_0 = 0,5$	seitliche Ein- spannung $\beta = \beta_0 = 0,5$
Rechteck- querschnitt $r_x = \gamma_M = 0$	$M_k = \frac{\pi}{l} \sqrt{EJ_y GJ_t}$ nach [4]	$M_k = \frac{1,18\pi}{l} \sqrt{EJ_y GJ_t}$ nach Gl. (118)	$M_k = \frac{2\pi}{l} \sqrt{EJ_y GJ_t}$ nach [4]
V-förmiger Querschnitt $C_M = 0; J_y = \infty$	$M_k = 1,0 \frac{GJ_t}{2\gamma_M - r_x}$ Gl. (64)	—	$M_k = 1,0 \frac{GJ_t}{2\gamma_M - r_x}$ nach Gl. (128)

Daraus kann man folgende Folgerungen ziehen:

Während die Zunahme der Kipplast von Balken mit Rechteckquerschnitten infolge der Verwölbungsbehinderung gegenüber dem Fall freier Verwölbung bis zu ca. 20 % betragen kann (je nach Belastungsart), ist der Einfluss der Einspannung auf das Kippmoment beachtlicher. Dabei erhöht sich M_k auf da 2-fache bei reiner Biegung. Bei I-Querschnitten sind diese Wirkungen noch deutlicher. Für ein durchgerechnetes Beispiel ($1^2 GI / EC_M = 47,3$) beträgt der Kippmomentzuwachs gegenüber der Gabel Lagerung ohne Endscheiben ca. 30 % bei $\beta = 1$, $\beta_0 = 0,5$, während bei $\beta = \beta_0 = 0,5$ ca. 170 %.

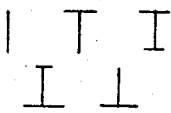
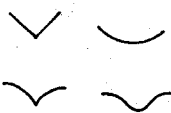



Träger mit V-förmigen Querschnitten zeigen ein anderes Bild. Bemerkenswert ist der Fall reiner Biegung von Trägern mit V-förmigem Querschnitt. Dabei beeinflusst die Einspannung der Trägerenden gar nicht das Kippmoment, sofern die Annahme $EI_y = \infty$ und $C_M = 0$ zur Geltung kommen.

Es ist zu empfehlen, den günstigen Einfluss der Endscheiben auf die Kipplast von flächenartigen Trägern mit V-förmigen Querschnitten ausser Acht zu lassen, aus folgenden Gründen:

- 1) Die Laststeigerung infolge der starren Endscheiben ist relativ klein.
- 2) Die in der Wirklichkeit angebrachten Endscheiben können senkrecht zu ihrer Ebene meistens nicht als vollkommen starr angesehen werden.
- 3) Die flächenartigen Träger sind weniger auf Kippen gefährdet als Balken mit I-Profilen.

6. Zusammenstellung der für den praktischen Gebrauch
geeigneten Formeln

T a f e l IX

Lagerungs- art	Trägertyp	Querschnitts- form	Gl. - Nr.	
			ohne Längskraft	mit Längskraft
ohne End- scheiben	Balken- träger		(38)	(84)
	flächen- artige Träger		(55)	(86)
Mit End- scheiben	Balken- träger		(108)	(118)
			(96)	-
	flächen- artige Träger		(122)	(122)

7. Anwendung der gewonnenen Lösungen auf baupraktische Konstruktionen

7.1 Konstruktionen aus Stahl

Die in dieser Arbeit entwickelten Formeln wurden unter der Voraussetzung uneingeschränkter Gültigkeit des HOOKE'schen Gesetzes abgeleitet. Das heisst, die Abhängigkeit $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ ist linear. Entgegen dieser Voraussetzung sind die Baumaterialien nicht ideal elastisch. Überschreitet irgendwo die kritische Spannung σ_k die Proportionalitätsgrenze σ_p , so vermindern sich an dieser Stelle der Elastizitätsmodul E und der Schubmodul G ; die kritische Belastung fällt dann entsprechend kleiner aus. Analog dem Verzweigungsproblem des einfachen Druckstabes müsste im Sinne einer strengen Theorie der Kippstabilität ein beschränkt elastisches Material in Betracht gezogen werden. Eine theoretische Untersuchung für das Problem des Biegedrillknickens im unelastischen Bereich wurde von ROIK [11] durchgeführt.

Die exakte Behandlung des Kipp-Problems im unelastischen Bereich erweist sich als schwieriger als beim Biegeknicken, weil beim Kippen wesentliche Erschwernisse hinzutreten, da die Spannungsverteilung über die Balkenhöhe und über die Spannweite veränderlich ist. Eine genaue Lösung ist kaum zu finden, so dass man eine Näherungslösung, ausgehend von den Ergebnissen für vollkommen elastisches Material, derart entwickelt, dass die ideelle Kippspannung im Sinne der Knickspannungslinie des einfachen Druckstabes abgemindert wird (Bild 17) .

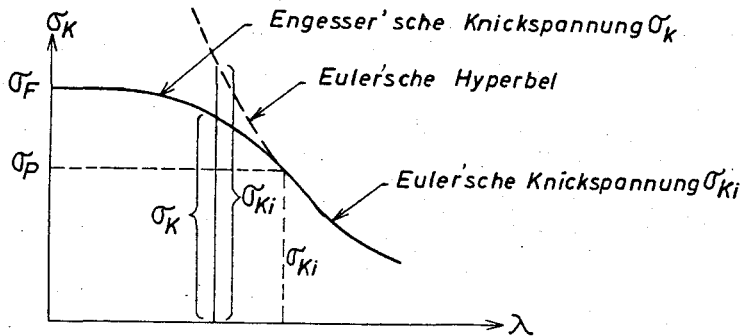


Bild 17 Knickspannungslinie

Auf alle Fälle ist eine Abgrenzung durch die Fließgrenze des Materials gegeben. Um einen Anhaltspunkt zu bekommen, kann angenommen werden, dass E und G überall im selben Verhältnis abgemindert werden, und zwar entsprechend der maximalen Spannung an der meist beanspruchten Stelle. Dieses Verfahren ist bestimmt zu ungünstig, denn die max. Abminderung trifft in Wirklichkeit nur an einer Stelle zu und an allen anderen Stellen fällt sie kleiner aus. Die Abminderungszahlen nach ENGESSER $\alpha = \frac{T}{E}$ bzw. nach SHANLEY $\alpha = \frac{E_1}{E}$ sind bereits in [18] tabellarisiert.

Da bei Stabilitätsuntersuchungen der Einfluss der Schubverformungen (gegenüber Biegeverformungen) verhältnismässig gering ist, kann angenähert angenommen werden, dass der Schubmodul im plastischen Bereich dieselbe Abhängigkeit von der Spannung hat wie der Modul T oder der Modul E_1 . Damit ist $\alpha = \frac{G}{E} \approx \frac{T}{E}$ bzw. $\frac{E_1}{E}$.

Nach obigen Ausführungen gelten die in dieser Arbeit abgeleiteten Gleichungen auch für Balken im unelastischen Bereich, wenn statt E bzw. G αE bzw. αG eingeführt wird, wobei α der Tafel 18 in [18] entsprechend der max. Spannung

an der meist beanspruchten Stelle des Balkens zu entnehmen ist.

Nach DIN 4114 Ri 15.12 erfolgt der Kippsicherheitsnachweis wie folgt: Zunächst ist die ideelle Kippspannung σ_{ki} , die unter der idealen Kipplast auftretende grösste Druckspannung, zu berechnen. Dann ist der Tafel 7 oder dem Bild 21 der DIN 4114 die "abgeminderte" Kippspannung σ_k zu entnehmen und die Kippsicherheitszahl $\nu_k = \sigma_k / \sigma_{max} = \sigma_k \cdot J_x / e \cdot M_{max}$ zu bestimmen. Die Kippsicherheitszahl darf im Belastungsfall 1 nicht kleiner als $\nu_k = 1,71$ und im Belastungsfall 2 nicht kleiner als $\nu_k = 1,5$ sein.

7.2 Konstruktionen aus Stahlbeton

7.21 Übersicht

Die Beurteilung der Kippsicherheit von Stahlbetonbalken ist wegen der Rissbildung und beschränkten Elastizität des Betons vielfach schwieriger als bei Stahlträgern.

Die Kippformeln, die unter der üblichen Annahme der Elastizitätstheorie - elastisches und homogenes Material - hergeleitet wurden, müssen für Stahlbeton- und Spannbetonkonstruktionen modifiziert werden, damit die Unelastizität sowie die Rissbildung des Betons berücksichtigt werden können.

In den vergangenen Jahren sind einige Arbeiten über Kippstabilität von Stahlbeton- bzw. Spannbetonbalken veröffentlicht worden. HANSELL und WINTER [19] berichteten über ihre experimentellen Untersuchungen über das Problem der seitlichen Stabilität schmaler hoher Stahlbetonträger mit einem Querschnitt von $6,3 \times 33$ cm und dem Verhältnis l/b (Stützweite / Trägerbreite) = $28,8 - 86,4$. Auch in diesen extremen Verhältnissen trat kein seitliches Auskippen ein. Sie entwickelten auch zur Beurteilung der Kippsicherheit von Stahlbetonbalken mit Rechteckquerschnitt ein Rechenverfahren, das die Einflüsse der Inelastizität und der Rissbildung näherungsweise einschliesst.

PETTERSSON schlug in [14] eine Näherungsmethode zur Berechnung

der kritischen Last von schlanken Stahlbetonträgern vor. Die Plastizität und die Rissbildung des Betons wurden durch einen reduzierten Elastizitätsmodul berücksichtigt, während die Biege- und die Torsionssteifigkeit auf einen homogenen Querschnitt ohne Risse zu beziehen ist.

Eine Veröffentlichung von SIEV [20] gibt eine kurze Zusammenfassung der Kipptheorie für homogene Stoffe unter besonderer Berücksichtigung des Stahlbetons an. Die Arbeit umfasst die Bestimmung der Biege- und Torsionssteifigkeiten für Rechteckquerschnitte im risslosen Zustand, im elastischen Zustand mit Rissen sowie im plastischen Zustand mit Rissen.

SANT und BLETZACKER [21] berichteten über eine experimentelle Untersuchung über die Kippsicherheit von Stahlbetonträgern. Für 2 allgemeine, in der Praxis vorkommende Belastungsarten wird ein Stabilitätskriterium vorgeschlagen, das zu vereinfachten Formeln führt. Die Anwendbarkeit dieser Formeln ist auf rechteckige, schwach bewehrte Stahlbetonträger beschränkt. Die experimentellen Ergebnisse bestätigen die theoretischen.

Ein einfaches Rechenverfahren für die Bestimmung der Kipplast schlanker Spannbeonträger wurde von LEBELLE [12] sowie MÜLLER [13] angegeben. Hierbei ist ein elastischer, ungerissener Querschnitt zugrunde gelegt worden.

PODOLNY und SCALZI [22] berichteten über einen einzigen Versuch mit vorgespannten Betonbalken mit einem ungekehrten T-Querschnitt. Als Ursache des Versagens trat hier ein Biegebruch ein.

Nach den vorstehenden Ausführungen erweist sich im Hinblick auf die Sicherheit sowie die Wirtschaftlichkeit als notwendig, ein allgemeines Rechenverfahren zur Beurteilung der Kippsicherheit von Stahlbetonbalken zu entwickeln.

Zunächst werden die erforderlichen Rechnungsgrundlagen aufgestellt, vor allem die Spannungsverteilung in der Biegedruckzone und die Spannungs-Dehnungs-Linie der Betonstäbe.

Der nächste Schritt sei die Berechnung der Biege- und Torsionssteifigkeiten für verschiedene Dehnungszustände. Durch einfache Formeln werden die Veränderlichkeiten der Steifigkeiten längs der Balkenachse berücksichtigt.

Im Abschn. 7.25 wird der Rechengang ausführlich erläutert, und an Hand von Beispiel 8 (im Anhang) wird die Handhabung des entwickelten Verfahrens weiter erleichtert.

7.22 Rechnungsgrundlagen

7.221 Spannungsverteilung in der Biegedruckzone

Für die Berechnung der Verformungen sowie der Schnittkräfte, ist zunächst die Kenntnis der Spannungsverteilung in der Biegedruckzone notwendig. Während in querkraftfreien Bauteilen die Dehnungen nahezu linear verteilt sind, ist die Spannungsverteilung unbekannt.

Von einigen Autoren wurde die Ansicht vertreten, dass die Spannungsverteilung in der Biegedruckzone mit der bei konstanter Dehngeschwindigkeit gewonnenen Arbeitslinien übereinstimmt. Durch die Ergebnisse der von RASCH durchgeführten Biegedruckversuche [23] wird bestätigt, dass diese Hypothese mit genügender Genauigkeit zutrifft. Andere Autoren [24] bezweifelten diese Ansicht und unternahmen Versuche zur Bestimmung der Biegedruckwerte α , β und ϵ_b .

Mit diesen Werten kann die Tragfähigkeit von Bauteilen mit Rechteckquerschnitt bei Kurzzeitbelastung berechnet werden. Zur Berechnung der Verformungen sowie der Tragfähigkeit von Bauteilen mit beliebigen anderen Querschnittsformen ist aber die Kenntnis der Spannungsverteilung notwendig. Die Arbeit von RASCH [23] bietet uns ausserdem die Möglichkeit, den Einfluss der Lastdauer auf die Spannungsverteilung in der Biegedruckzone zu erfassen.

Die Spannungsverteilung in der Betondruckzone soll durch das Spannungs-Stauchungs-Diagramm des Betons gegeben sein.

Nach DILGER [25] soll das $\sigma_b - \epsilon_b$ -Diagramm durch die Funktion

$$\sigma_b = \beta_p \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_b}{\epsilon_{bb}} \right)^\lambda \right] \quad (131)$$

dargestellt werden.

Dabei ist

β_p = Prismendruckfestigkeit = $0,85 \beta_w$

β_w = Würfeldruckfestigkeit

ϵ_{bb} = Grösstwert der beim Bruch erreichten Betonstauchung

λ = Exponent zur Bestimmung des Verlaufs des Diagramms.

DILGER hat für Kurzzeitbelastung die Bruchstauchung ϵ_{bB} in Abhängigkeit von der Betongüte wie folgt festgelegt:

$$\epsilon_{bB} (\%) = 5,0 - \frac{\beta_w (kp/cm^2)}{400} \quad (132)$$

Die beste Übereinstimmung mit den Versuchswerten von RASCH 23 ergibt sich mit

$$\lambda = \frac{2000}{100 + \beta_w (kp/cm^2)} \quad (133)$$

ROŠ [26] gibt für den Verlauf der $\sigma_b - \epsilon_b$ -Linie bei Kurzzeitbelastung eines Hyperbelgleichung an, die genügend genau mit gemessenen Werten übereinstimmt:

$$\epsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_{el.}} + 0,1 \frac{\sigma_b}{1000 (\sqrt{\beta_p} - \sigma_b)} \quad (134)$$

wobei

$$\sqrt{} = 1 + \frac{\beta_p (kp/cm^2)}{2200} \quad (135)$$

$$E_{el.} = \frac{550000 \beta_p (kp/cm^2)}{150 + \beta_p (kp/cm^2)} \quad (136)$$

bedeuten.

Die Beziehung (134) zur Beschreibung der Spannungsverteilung in der Betondruckzone wurde auch von KORDINA [27] für Stabilitätsuntersuchungen verwendet. Für $1/(d\epsilon/d\sigma_b)_{\sigma_b=0}$ wird die Steigung der Arbeitslinie im Ursprung E_0 gesetzt. Die Werte E_0 in Abhängigkeit von der Betongüte sind den DIN 4227 bzw. 1075 zu entnehmen. Danach lautet die Beziehung (134)

$$\epsilon_b = \sigma_b \left(\frac{1}{E_0} - \frac{0,1}{1000 \sqrt{\beta_p}} + \frac{0,1}{1000 (\sqrt{\beta_p} - \sigma_b)} \right) \quad (137)$$

Aufgrund theoretischer Überlegungen und mit Hilfe zahlreicher Versuchsergebnisse gibt LIEBENBERG 28 für den Verlauf der

$\sigma_b - \epsilon_b$ -Linie bei Kurzzeitbelastung folgende Gleichung an:

$$\sigma_b = A \sqrt{\beta_p} (1 - B \epsilon_b^n) \epsilon_b \quad (138)$$

wobei $A = 17750 [\sqrt{kp/cm}]$,

$$B = \frac{1}{(1+n) \epsilon_m^n}$$

$$n = \frac{\beta_p}{A \sqrt{\beta_p} \cdot \epsilon_m - \beta_p}$$

$$\epsilon_m = 0,002$$

bedeuten.

Die maximale Bruchstauchung ϵ_{bb} wird wie folgt festgelegt:

$$\epsilon_{bb} = 0,004 - \frac{\beta_b (k_p / \text{cm}^2)}{450 \cdot 10^3} \quad (139)$$

Neuerdings sind in DIN 1045, Neufassung, Spannungs- Dehnungs-Linien des Betons unter Kurzzeitbelastung für die Verformungsberechnungen angegeben. Sie sind in Bild 18 wiedergegeben.

In Bild 19 sind verschiedene $\sigma_b - \epsilon_b$ -Linien für die Betongüte B 225 nach verschiedenen Autoren dargestellt. Aus dem Vergleich der $\sigma_b - \epsilon_b$ -Linien geht hervor, dass die nach DILGER, LIEBENBERG und DIN 1045, Neufassung, angegebenen Linien bis $\epsilon_b \approx 2,2 \text{ ‰}$ die experimentellen Werte von RASCH sehr gut erfassen. Die Abweichungen bei $\epsilon_b > 2,2 \text{ ‰}$ sind für die praktische Ermittlung des Biegebruchmomentes jedoch ohne Belang.

Obwohl viele Ansätze, deren Richtigkeit experimentell überprüft wurden, zur Beschreibung des Verhaltens der Biegedruckzone unter Kurzzeitbelastung zur Verfügung stehen, ist die Spannungsverteilung in der Betondruckzone unter Dauerstandbelastung noch nicht restlos erforscht [23], [27], [29], und [30]. Es soll im folgenden versucht werden, mathematische Ansätze zur Beschreibung der Spannungsverteilung in der Biegedruckzone unter verschiedenen Standzeiten bei Dauerbelastung zu entwickeln und deren Richtigkeit an Hand der Versuchsergebnisse von RASCH [23] zu überprüfen.

Die $\sigma_b - \epsilon_b$ -Funktion soll die allgemeine Form annehmen.

$$\sigma_b = \beta_R \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_b}{\epsilon_{bb}} \right)^\lambda \right] \quad (140)$$

Dabei sind

$$\lambda = \frac{2000}{100 + \beta_w (k_p / \text{cm}^2)} \quad (141)$$

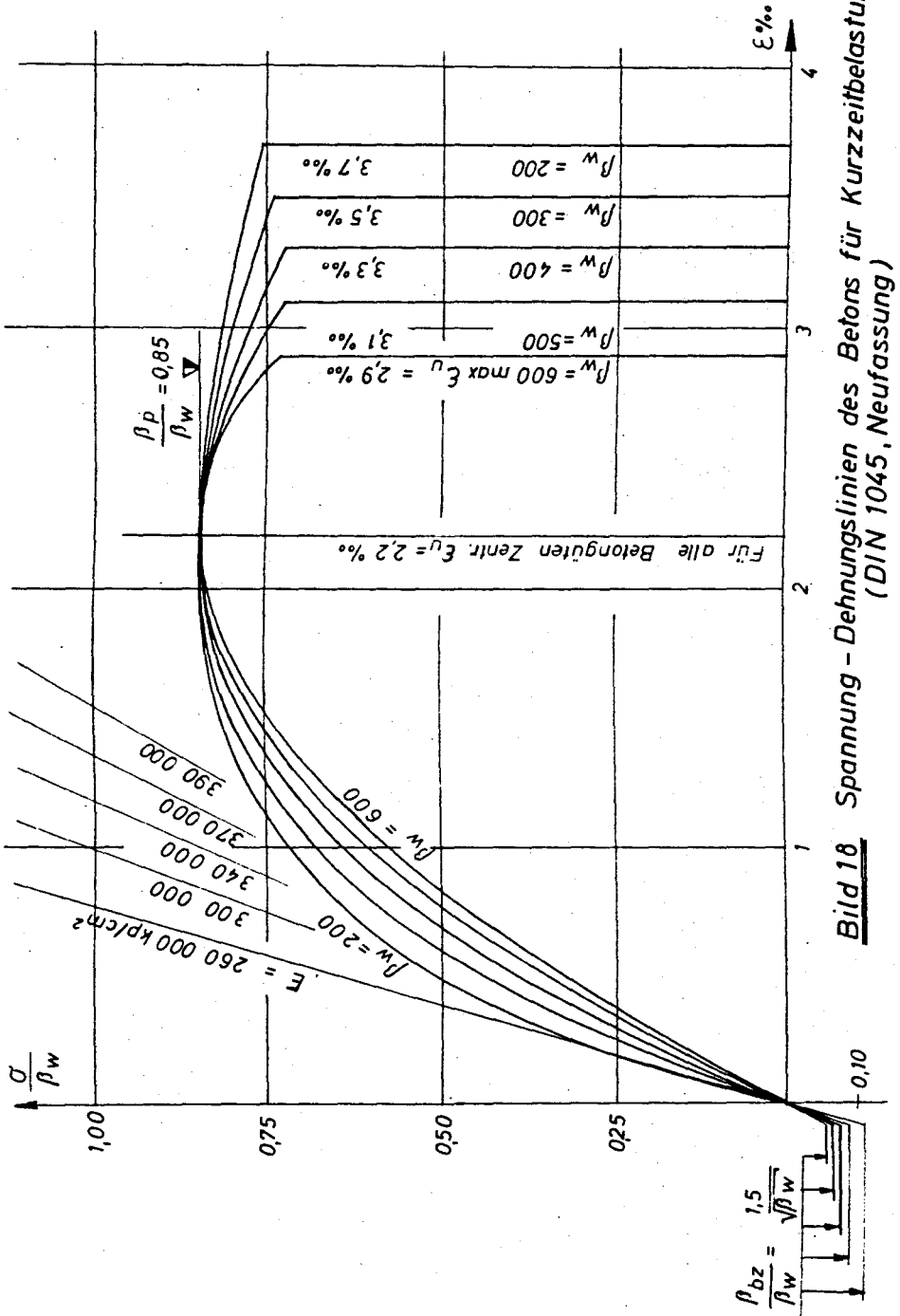
β_R = Rechenwert für die Druckfestigkeit des Betons,

ϵ_{bb} = Rechenwert für die Bruchstauchung des Betons,

β_R und ϵ_{bb} sind in Abhängigkeit von der Lastdauer und der Betongüte in Tafel X angegeben.

T a f e l X

Lastdauer	β_R / β_w	$\epsilon_{bb} \quad (\text{‰})$
100 min.	0,85	5,00 - $\beta_w / 400$
7 Tage	0,77	5,45 - $\beta_w / 425$
2 Jahre	0,72	5,90 - $\beta_w / 450$
200 Jahre	0,70	6,35 - $\beta_w / 475$



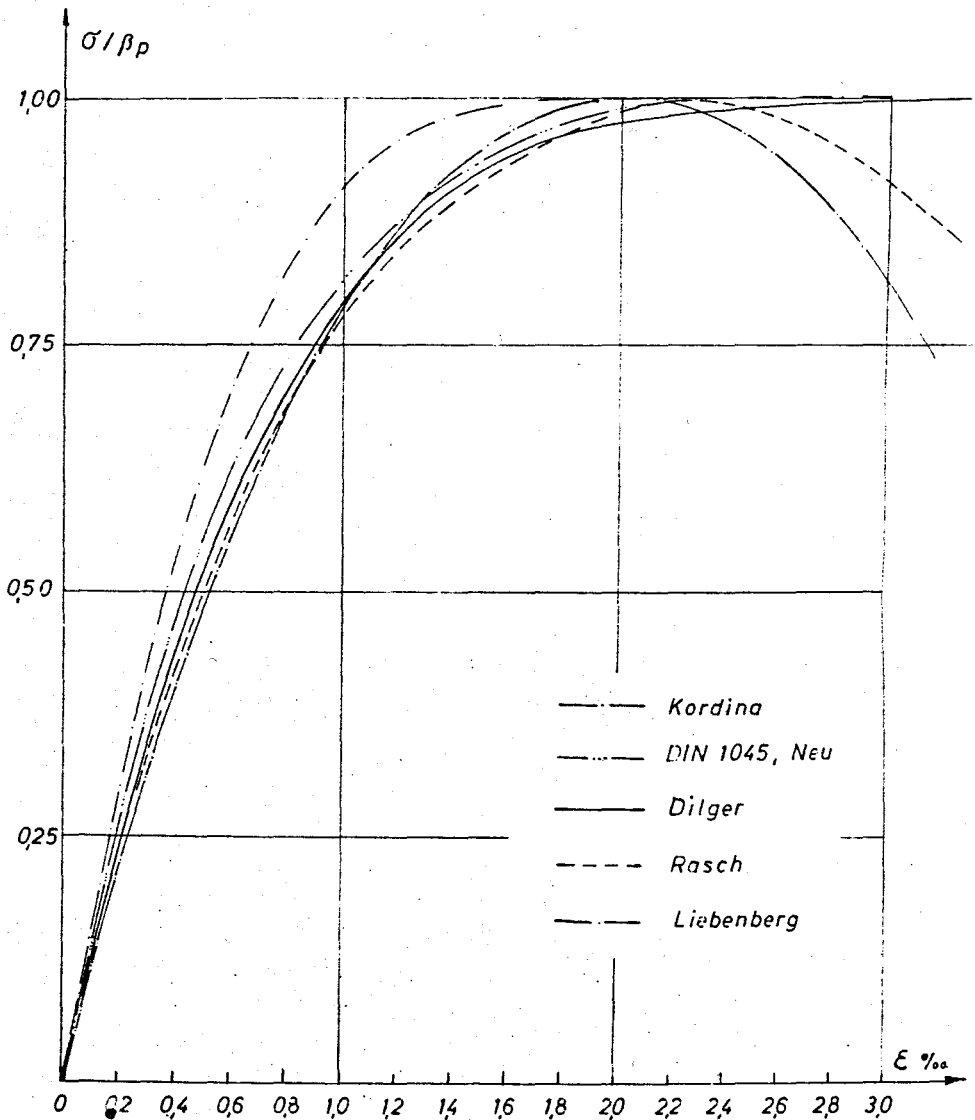


Bild 19 Spannungs - Dehnungslinien der Betongüte B 225 für Kurzzeitbelastung nach verschiedenen Autoren

Um die gute Übereinstimmung der mit β_R , ϵ_{b8} und λ sich ergebenden $\sigma_b - \epsilon_b$ -Diagramme mit den Versuchswerte auszuweisen, sind in Bild 20 für B 225 und in Bild 21 für B 450 die von RASCH [23] bei mehreren, konstanten Dehngeschwindigkeiten ermittelten Diagramme mit den Rechenwerten verglichen. Daraus geht hervor, dass sowohl bei Kurzzeitbelastung als auch bei Dauerstandbelastung die oben angegebenen Ansätze die experimentellen Werte sehr gut erfassen.

Es sei noch erwähnt, dass die in Tafel X angegebenen Werte für ϵ_{b8} lediglich reine Rechengrössen darstellen dürften, die die beste Übereinstimmung mit den schon erwähnten Versuchsergebnissen liefern könnten.

Für die Ermittlung der Bruchschnittgrössen wird als Nennbetongüte B_n die 5 %-Fraktile aus der Würfeldruckfestigkeit gewählt (β_w , 5 %).

Für mittlere und hohe Betongüten kann ia angesetzt werden.

$$\beta_{w,5\%} = \beta_{w,m} - 50 \text{ (kp/cm}^2\text{)},$$

wobei $\beta_{w,m}$ der Mittelwert der Betonfestigkeit ist. Darüber hinaus wird der Einfluss einer Dauerbeanspruchung durch Herabsetzung der rechnerisch ausnutzbaren Festigkeit mit dem Faktor 0,825 berücksichtigt, wobei ausserdem noch die der Würfelprüfung anhaftende Überschätzung der Festigkeit mit dem Faktor 0,85 zu erfassen ist. Dementsprechend wird der Scheitelpunkt der rechnerisch ausnutzbaren Festigkeit der Biegedruckzone mit

$$0,85 \cdot 0,825 \beta_{w,5\%} = 0,7 \beta_{w,5\%}$$

festgelegt.

T a f e l X I

(für Bruchsicherheitsnachweis)

B	200	300	400	500	600	= $\beta_{w,m}$ (kp/cm ²)
B _n	150	250	350	450	550	= $\beta_{w,5\%}$ (kp/cm ²)
β_R	105	175	245	315	385	= $0,7 \beta_{w,5\%}$ (kp/cm ²)

Gemäss DIN 1045, Neufassung, ist für den Nachweis der Bruchsicherheit die Spannungs-Dehnungs-Linie nach Bild 22 anzunehmen,

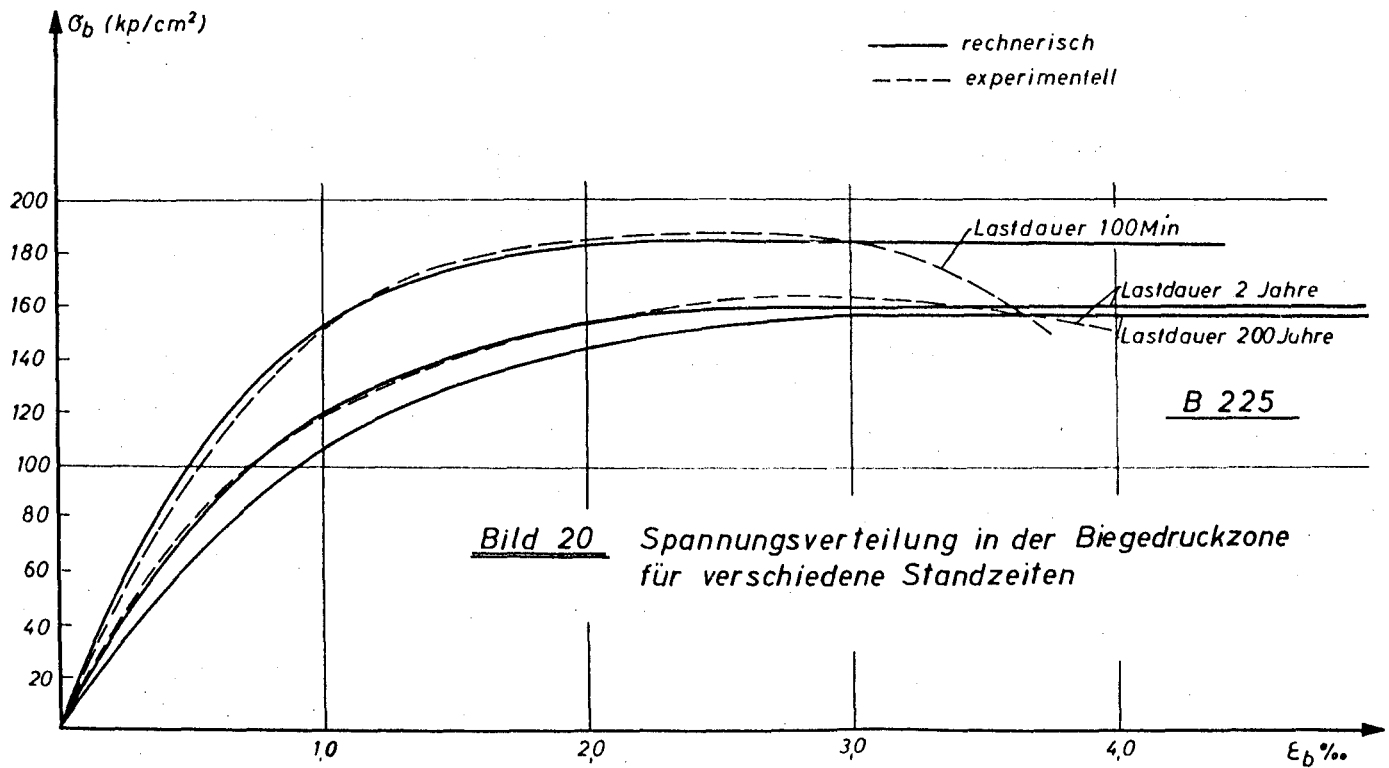


Bild 20 Spannungsverteilung in der Biegedruckzone für verschiedene Standzeiten

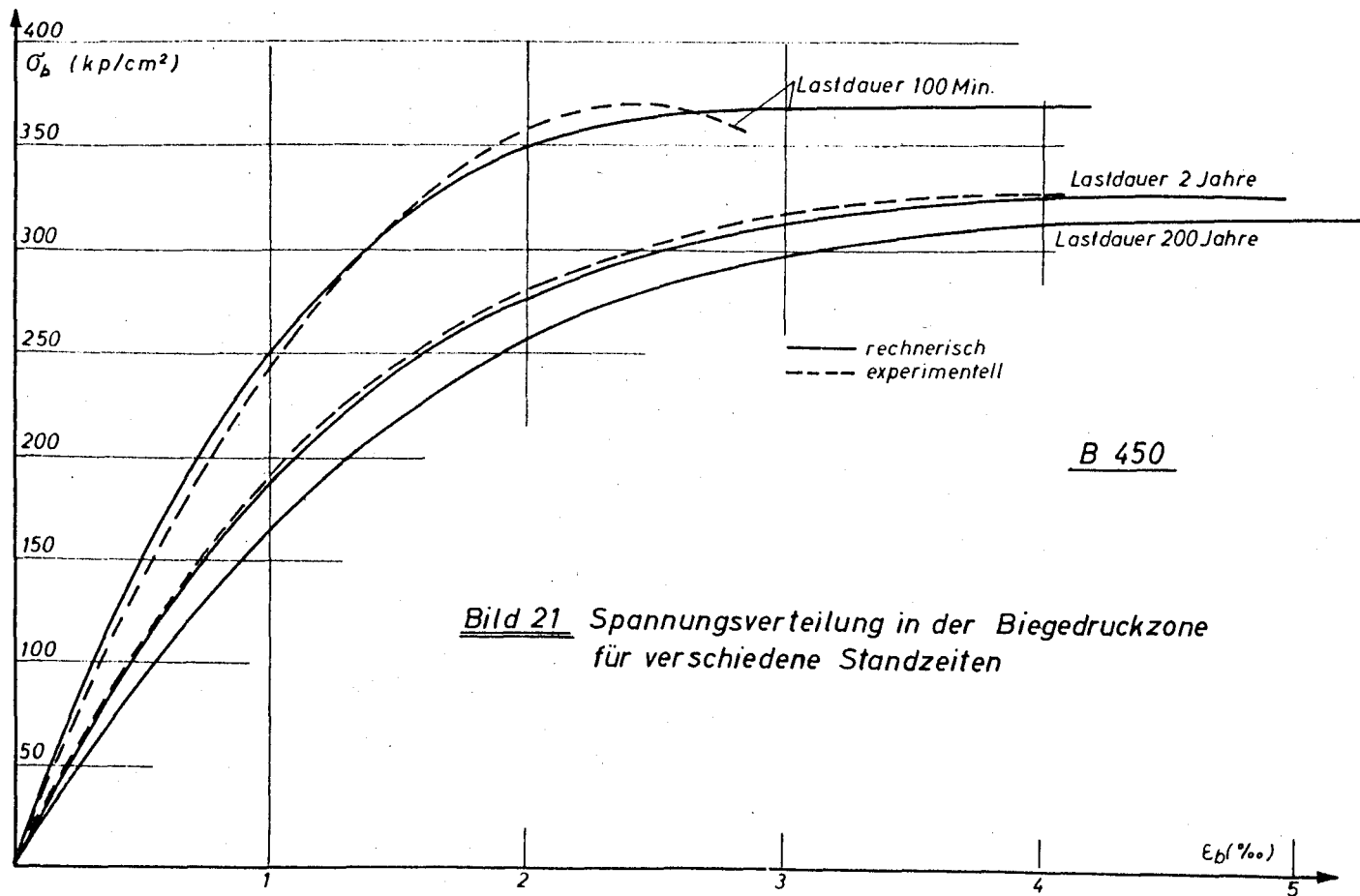


Bild 21 Spannungsverteilung in der Biegedruckzone für verschiedene Standzeiten

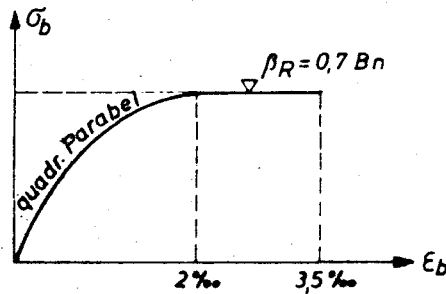


Bild 22 *Idealisierte σ - ϵ -Linie für Beton*

Die Festlegung der ausnutzbaren Betondruckfestigkeit hat beim Kippsicherheitsnachweis zunächst davon auszugehen, dass das Verformungsverhalten des gesamten Balkens in Rechnung zu stellen ist. Es darf daher - anders als bei dem Bruchsicherheitsnachweis - der Mittelwert der Betongüte ($\beta_{w,m}$) zugrunde gelegt werden (Tafel XII).

In DIN 1045, Neufassung, werden für die Verformungsberechnungen Spannungs-Dehnungs-Linien des Betons festgelegt. Sie entsprechen dem Verhalten unter Kurzzeitbelastung, wobei die Betongüte zu 85 % ihres Mittelwertes gewählt werden soll, da der Kippvorgang klassischer Art zweifellos ein kurzzeitig ablaufender Vorgang ist. Diese σ - ϵ -Linien sind in Bild 18 angegeben.

T a f e l X I I

(für Kippsicherheitsnachweis)

B	200	300	400	500	600	= $\beta_{w,m}$
β_R	170	255	340	425	510	= $0,85 \beta_{w,m}$

Um die Betonzugfestigkeit β_{bz} berücksichtigen zu können, wird die $\sigma_b - \varepsilon_b$ -Linie über den Ursprung hinaus mit der Steigung E_0 weitergeführt. Über β_{bz} wurden von verschiedenen Autoren unterschiedliche Annahmen gemacht.

Unter Zugrundelegung der Zugbruchdehnung von normal bewehrtem Beton mit etwa 0,1 ‰ setzt KORDINA [27]

$$\beta_{bz} = 0,0001 E_0 \quad (142)$$

Nach DIN 1045, Neufassung, darf man als obere Grenze für die Zugfestigkeit des Betons den Wert

$$\beta_{bz} = 1,5 \sqrt{f_w} \quad (143)$$

annehmen. (vergl. Bild 18).

Die Tangente an die $\sigma - \varepsilon$ -Linie an einer beliebigen Stelle gibt den Verformungsmodul E_t an. Der Tangentenmodul E_t für einen bestimmten Punkt der $\sigma - \varepsilon$ -Linie gilt nur für die jeweils zugeordnete Spannung, während der Sekantenmodul E_{sek} den mittleren Verformungsmodul eines Spannungsbereiches angibt. Der Tangentenmodul E_t des Betons kann aus der $\sigma_b - \varepsilon_b$ -Funktion durch Differenzieren gewonnen werden.

Die Querdehnungszahl ergibt sich bei einachsiger Beanspruchung aus dem Verhältnis von Querdehnung zu Längsdehnung. ν des Betons ist keine Materialkonstante im Sinne des HOOKEschen Gesetzes, sondern wird mit zunehmender Druckbeanspruchung grösser. Die Anwendung der Elastizitätstheorie setzt Linearität zwischen Spannung und Dehnung voraus. Diese Voraussetzung lässt sich in der Rechnung dadurch erfüllen, dass man die ia gekrümmt verlaufenden $\sigma_b - \varepsilon_b$ -Linien von Laststufe zu Laststufe durch Polygönzüge ersetzt. Die Querdehnungszahlen sind also schrittweise aus den Dehnungszunahmen $\Delta \varepsilon_q$ und $\Delta \varepsilon_l$ pro Laststufe in Abhängigkeit von der Spannung σ_b nach der Formel

$$\nu = \left| \frac{\Delta \varepsilon_q}{\Delta \varepsilon_l} \right| = f(\sigma_b) \quad (144)$$

zu berechnen.

In Anlehnung an die Versuche von RASCH [23] werden $\varepsilon_q - \varepsilon_l$ -Linien in Bild 23 für Kurzzeitbelastung (1°/oo/10 Min.) und in Bild 24 für Langzeitbelastung (1°/oo/7 Tage) einheitlich für alle Betongüten eingetragen, denn es ergab sich keine eindeutige Beziehung zwischen der Querdehnungszahl ν und der Würfelfestigkeit β_w .

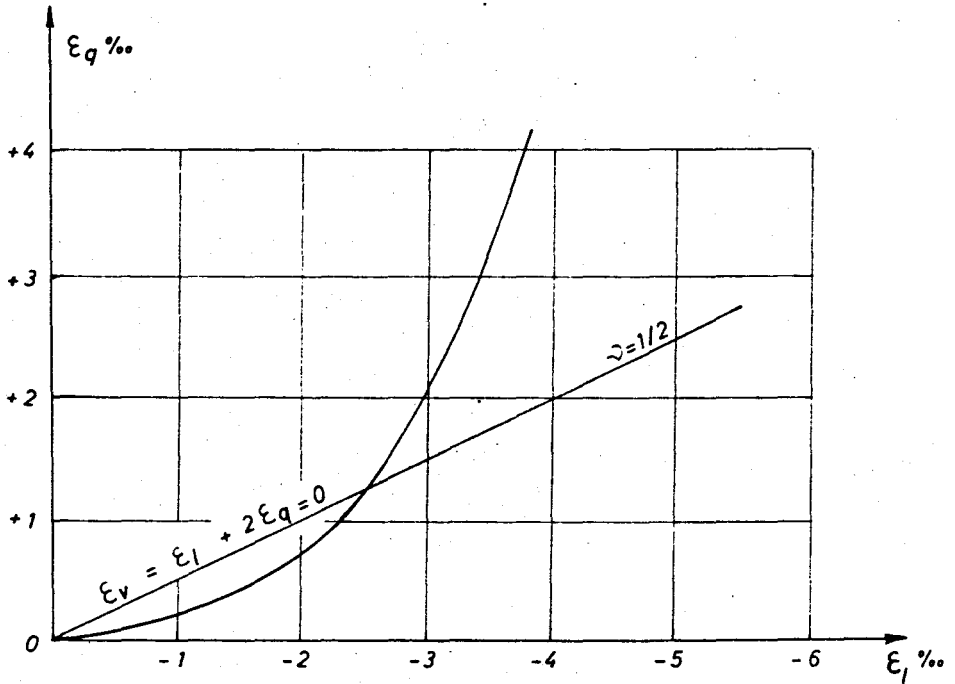


Bild 23 Querdehnungszahl $\nu = \left| \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_l} \right|$
für Kurzzeitlast B 225 ÷ 600

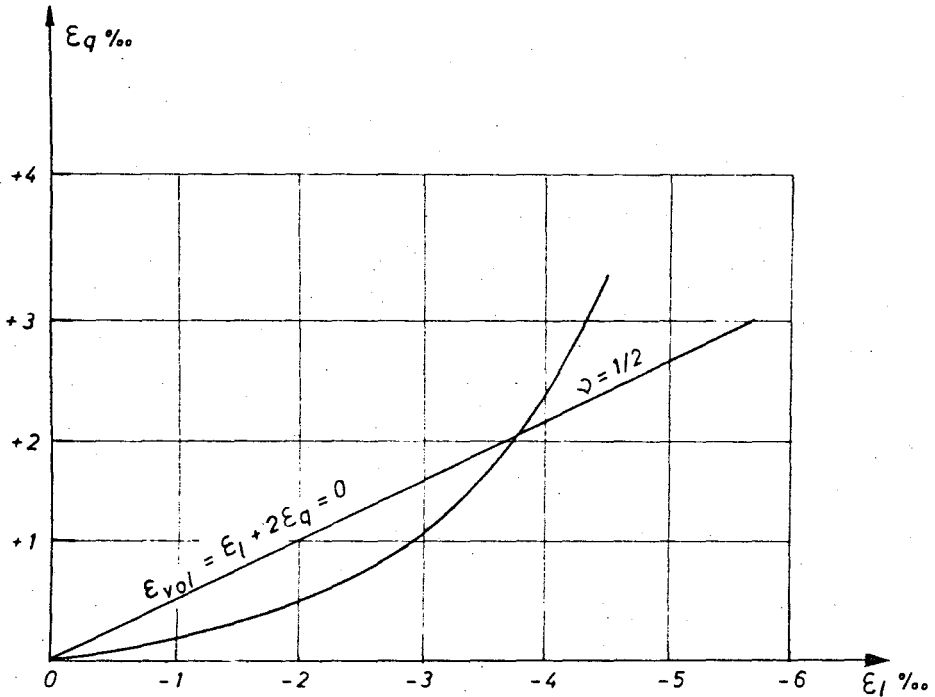


Bild 24 Querdehnungszahl $\nu = \left| \frac{\epsilon_q}{\epsilon_l} \right|$
für Langzeitlast $B\ 225 \div 600$

Für ein elastisches Material (Linearität zwischen Spannung und Dehnung) ergibt sich der Schubmodul aus

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (145)$$

Für einen elastisch-plastischen Baustoff wie Beton lässt sich die Beziehung (145) anwenden, wenn die Abhängigkeit des Verformungsmoduls E und der Querdehnungszahl ν von der auftretenden Spannung vorgegeben ist. Die Beziehung (145) lautet dann

$$G(\sigma) = \frac{E(\sigma)}{2(1 + \nu(\sigma))} \quad (146)$$

7.222 Spannungs-Dehnungs-Linien der Betonstähle

Sie sind in Bild 25 mit $E_e = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ aufgestellt, wobei der Bereich zwischen der Proportionalitäts- und Fließgrenze durch folgende Ansätze beschrieben werden kann:

B St 42/50

$$\sigma_e = 4,2 [1 - 0,0347 (4,0 - \epsilon_e)^2] \quad , \quad (147)$$

B St 50/55

$$\sigma_e = 5,0 [1 - 0,0326 (4,38 - \epsilon_e)^2] \quad . \quad (148)$$

Vergleichsrechnungen zeigen, dass der Einfluss des Übergangsbereiches der Stahlarbeitslinie auf die Momentenkrümmungsbeziehung für praktische Rechnungen unbedeutend ist.

7.23 Rechengrößen

7.231 Seitliche Biegesteifigkeit (Ely)

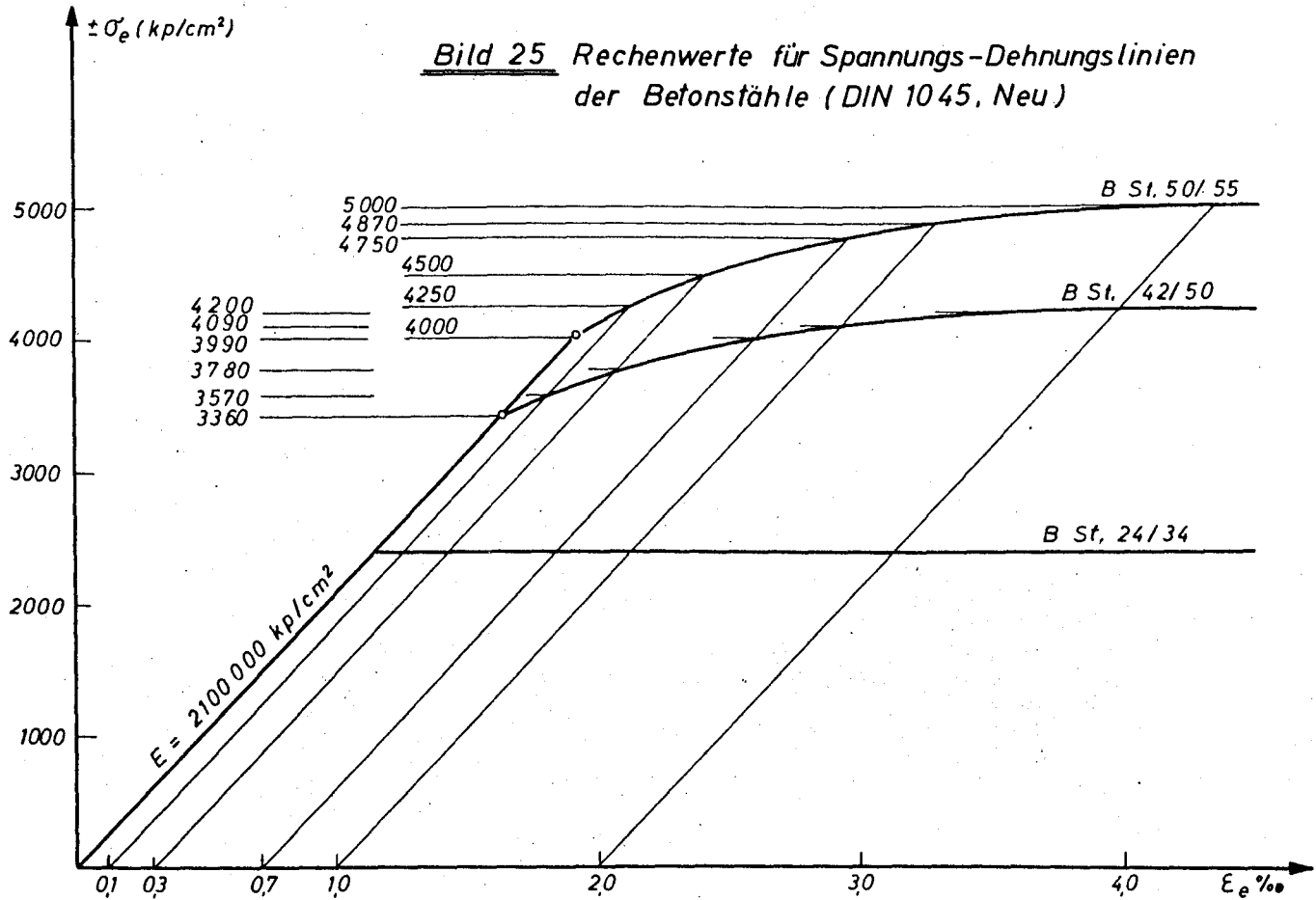
Zunächst ist die Lage der Biegenulllinie $n_o - n_o$ zu bestimmen (Bild 26). Bei einer Linksverschiebung durch das Kippen des Balkens entstehen im Beton und im Stahl Biegespannungen, und zwar rechts von $n_o - n_o$ Druck-, links davon Zugspannungen. Die Spannungsvergrößerungen an der Balkeninnenseite folgen dem Formänderungsgesetz der Belastung, für die Biegezugspannungen links von $n_o - n_o$ wird auch mit dem Belastungsmodul und nicht mit der Entlastungsgeraden gerechnet. Dabei bleibt man auf der sicheren Seite. Weil die seitliche Ausbiegung unendlich klein zu denken ist, besteht dann die Spannungsverteilungslinie für den Beton aus einer Geraden (Bild 26 a). Der Querschnitt wird in n Streifen zerlegt (hier $n = 10$).

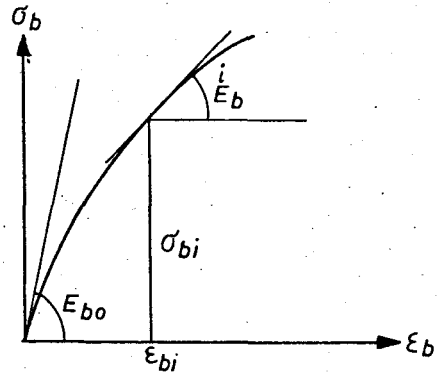
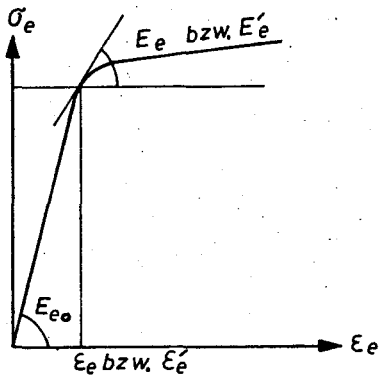
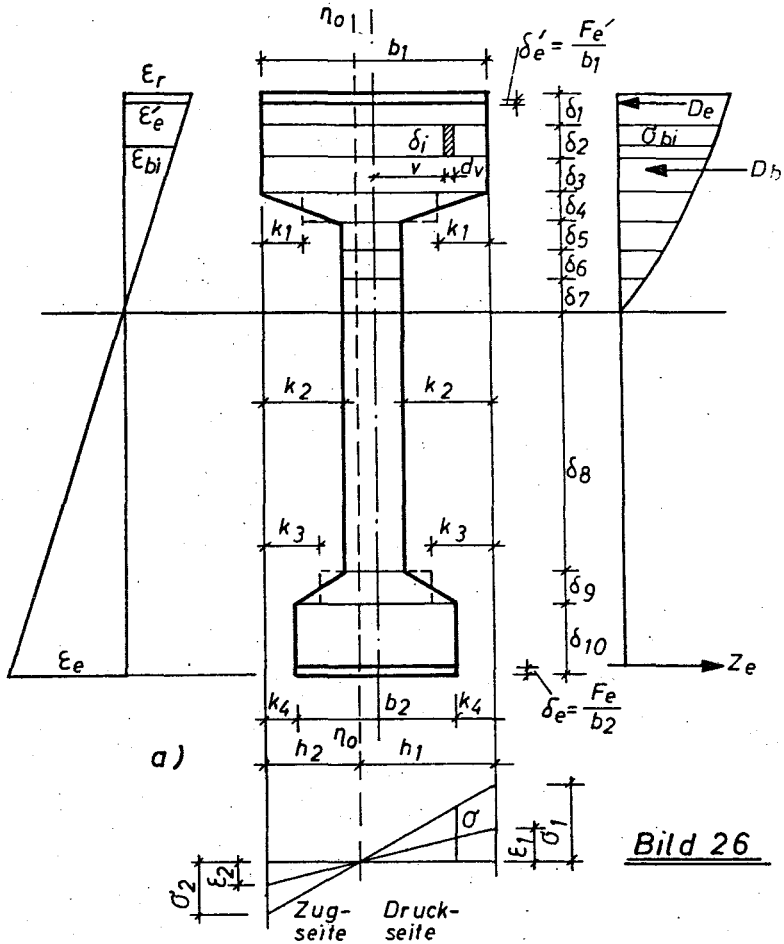
Die Lage der Nulllinie folgt aus der Gleichgewichtsbedingung; Summe aller Biegespannungen ist gleich Null

$$\sum_1^n \int \sigma_i \delta_i dv = 0$$

Die Auswertung dieser Bedingung für den vorliegenden Querschnitt (Bild 26 a) liefert

Bild 25 Rechenwerte für Spannungs-Dehnungslinien
der Betonstähle (DIN 1045, Neu)





$$\begin{aligned}
 E_e' \frac{F_e'}{b_1} h_1^2 + E_e \frac{F_e}{b_2} (h_1 - k_4)^2 + h_1^2 (E_{1b}^1 \delta_1 + E_{1b}^2 \delta_2 + \\
 + E_{1b}^3 \delta_3) + (h_1 - k_1)^2 E_{1b}^4 \delta_4 + (h_1 - k_2)^2 (E_{1b}^5 \delta_5 + \\
 + E_{1b}^6 \delta_6 + E_{1b}^7 \delta_7 + E_{b_0} \delta_8) + (h_1 - k_3)^2 E_{b_0} \delta_9 + \\
 + (h_1 - k_4)^2 E_{b_0} \delta_{10} = E_e' \frac{F_e'}{b_1} h_2^2 + E_e \frac{F_e}{b_2} (h_2 - k_4)^2 + \\
 + h_2^2 (E_{2b}^1 \delta_1 + E_{2b}^2 \delta_2 + E_{2b}^3 \delta_3) + (h_2 - k_1)^2 E_{2b}^4 \delta_4 + \\
 + (h_2 - k_2)^2 (E_{2b}^5 \delta_5 + E_{2b}^6 \delta_6 + E_{2b}^7 \delta_7) .
 \end{aligned}
 \tag{149}$$

Daraus wird die Lage der Nulllinie $n_0 - n_0$ bekannt, unter Beachtung, dass $h_2 = b_1 - h_1$ ist.

Für den Rechteckquerschnitt ($b_1 = b_2 = b$; $k_1 \dots k_4 = 0$) erhält man

$$\begin{aligned}
 h_1^2 \left\{ E_e' \frac{F_e'}{b} + E_e \frac{F_e}{b} + \sum_{i=1}^n E_{1b}^i \delta_i \right\} \\
 = (b - h_1)^2 \left\{ E_e' \frac{F_e'}{b} + E_e \frac{F_e}{b} + \sum_{i=1}^n E_{2b}^i \delta_i \right\} .
 \end{aligned}
 \tag{150}$$

Im Bereich der als gerissen betrachteten Betonzugzone ist für E_{1b} der Belastungsmodul E_{b_0} im Ursprung der Formänderungslinie des Betons und für E_{2b} der Wert Null einzusetzen. Im Bereich der Betondruckzone sind die E_{2b} der einzelnen Streifen gleich den entsprechenden E_{1b} zu setzen.

Vernachlässigt man den Einfluss der Bewehrung auf die Lage der Nulllinie $n_0 - n_0$, erhält man bei gleichbleibenden Streifendicken ($\delta_i = \text{const}$) als Bedingungsgleichung

$$h_1^2 \sum_{i=1}^n E_{1b}^i = (b - h_1)^2 \sum_{i=1}^n E_{2b}^i ,
 \tag{151}$$

aus welcher h_1 berechnet werden kann. Diese einfache Gleichung ist auch von HABEL in [31] angegeben.

Wird die Gesamtquerschnittsfläche gedrückt (Biegemoment mit Druckkraft), folgt $h_1 = h_2 = b/2$, da in allen Streifen $E_{2b} = E_{1b}$ sind. Zur Aufstellung der Gleichung für die Biegesteifigkeit EJ_y ist die Beziehung $M_a = M_i$ heranzuziehen.

$$\text{Mit } M_i = \sum_{i=1}^n \int \sigma v \delta_i dv$$

$$\text{und } M_a = \frac{EJ_y}{\rho}$$

erhält man für die seitliche Biegesteifigkeit

$$\begin{aligned} EJ_y = & \frac{h_1^3 + h_2^3}{3} E_e' \frac{F_e'}{b} + \frac{(h_1 - k_4)^3 + (h_2 - k_4)^3}{3} E_e \frac{F_e}{b_2} \\ & + \frac{h_1^3 + h_2^3}{3} \left(E_{1b}^1 \delta_1 + E_{1b}^2 \delta_2 + E_{1b}^3 \delta_3 \right) \\ & + \frac{(h_1 - k_1)^3 + (h_2 - k_1)^3}{3} E_{1b}^4 \delta_4 \\ & + \frac{(h_1 - k_2)^3 + (h_2 - k_2)^3}{3} \left(E_{1b}^5 \delta_5 + E_{1b}^6 \delta_6 + E_{1b}^7 \delta_7 \right) \\ & + \frac{(h_1 - k_2)^3}{3} E_{b_0} \delta_8 \\ & + \frac{(h_1 - k_3)^3}{3} E_{b_0} \delta_9 \\ & + \frac{(h_1 - k_4)^3}{3} E_{b_0} \delta_{10} \end{aligned} \quad (152)$$

Für den Rechteckquerschnitt vereinfacht sie sich zu

$$\begin{aligned} EJ_y = & \frac{h_1^3}{3} \left(E_e' \frac{F_e'}{b} + E_e \frac{F_e}{b} + \sum_{i=1}^n E_{1b}^i \delta_i \right) + \\ & + \frac{h_2^3}{3} \left(E_e' \frac{F_e'}{b} + E_e \frac{F_e}{b} + \sum_{i=1}^n E_{2b}^i \delta_i \right) \end{aligned} \quad (153)$$

und bei Vernachlässigung der Bewehrung lautet

$$EJ_y = \frac{h_1^3}{3} \sum_{i=1}^n E_{1b}^i \delta_i + \frac{h_2^3}{3} \sum_{i=1}^n E_{2b}^i \delta_i \quad (154)$$

Steht der Gesamtquerschnitt unter Druck, so ist

$$E_{1b} = E_{2b} = E_b \quad ; \quad h_1 = h_2 = b/2$$

und

$$EJ_y = \frac{b^3 d}{12} \sum \frac{E_b}{n} \quad (155)$$

Es ist leicht zu beweisen, dass die Grösse $\frac{\sum E_b}{n}$ gleich dem Sekantenmodul E_{sek} ist, der den Randstauchungen E_1 und E_2 entspricht (Bild 27).

$$\text{Daher ist} \quad EJ_y = \frac{b^3 d}{12} E_{sek} \quad (156)$$

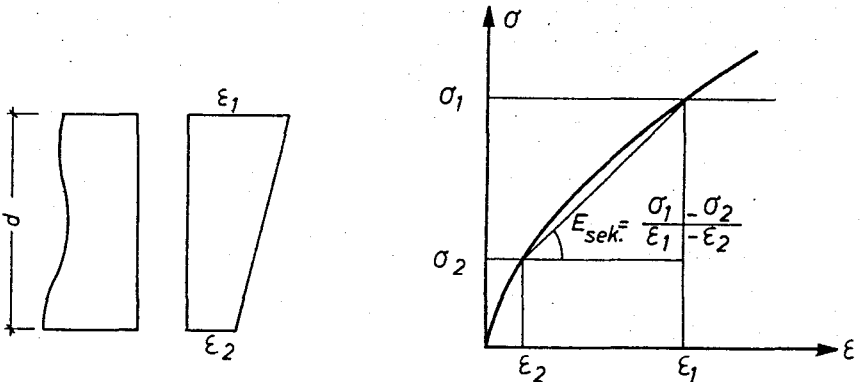


Bild 27

7.232 Torsionssteifigkeit (GJ_t)

Die Torsionsversuche zeigten, dass die Torsionssteifigkeit im gerissenen Zustand sehr stark abnimmt ($GJ_{t,II} / GJ_{t,I} \approx \frac{1}{5} \dots \frac{1}{7}$). Bisher ist das Problem der Torsionssteifigkeit von im gerissenen Zustand sich befindenden Stahlbetonbalken noch nicht restlos geklärt worden. Es soll im Rahmen dieser Arbeit eine auf der sicheren Seite liegende Rechenmethode zur Bestimmung der Torsionssteifigkeit ($GJ_{t,II}$) entwickelt werden.

Die Übereinstimmung zwischen den Rechenwerten und den z.Z. vorhandenen Versuchsergebnissen¹⁾ ist gut. Es wird im folgenden angenommen, dass sich die Torsionssteifigkeit eines gerissenen Stahlbetonquerschnittes aus zwei Anteilen zusammensetzt.

¹⁾ Z.Z., im Institut für Baustoffkunde der T.H. Braunschweig durchgeführte Torsionsversuche

$$GI_t = (GI_t)_{\text{Beton}} + (GI_t)_{\text{Bewehrung}} \quad (157)$$

Zu (GI_t) Beton ist nur die ungerissene Betonzone in Rechnung einzusetzen. Dabei bleibt der Steifigkeitszuwachs infolge der Verzahnung der gerissenen Zone ausser acht.

Nach der Elastizitätstheorie gilt für die Torsionssteifigkeit [32], [33]

$$GI_t = -4G \iint \phi \, dx \, dy = -4G \int \phi \, dF. \quad (158)$$

D.h.: Die Torsionssteifigkeit ist proportional dem Volumen des über dem Querschnitt errichteten sog. Spannungshügels.

Die Torsionsfunktion ϕ muss im Inneren des Querschnittes der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 1 \quad (159)$$

genügen und am Rand verschwinden. Da der Schubmodul $G(\sigma)$ in jedem Punkt des ungerissenen Querschnittsanteils infolge des unterschiedlichen Beanspruchungsgrades verschiedene Werte annehmen kann, so erscheint es als zweckmässig, den Ausdruck (158) für die Torsionssteifigkeit umzuformen wie folgt:

$$(GI_t)_{\text{Beton}} = -4G_0 \iint \varphi \, dx \, dy = -4G_0 \int \varphi \, dF. \quad (160)$$

Die D.Gl. (159) lautet dann

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{G(\sigma)}{G_0}. \quad (161)$$

G_0 ist lediglich eine Bezugsgrösse und kann dem Ursprungsschubmodul gleich gesetzt werden.

Die Bestimmung der Torsionssteifigkeit $(GI_t)_{\text{Beton}}$ ist also auf die Ermittlung der Torsionsfunktion φ zurückgeführt.

Für beliebig geformte Querschnitte kann die Differenzrechnung zur Lösung der D.Gl. (161) angewandt werden. Die stetig gekrümmte Fläche des sog. Spannungshügels erscheint hierbei als Vielkant, dessen Kanten sich im Grundriss in Abständen $\Delta x, \Delta y$ rechtwinklig schneiden. Die Differentialquotienten werden nach

ihrer geometrischen Bedeutung durch Funktionen der Ordinaten φ_k der Gitterknoten ersetzt. Danach ist in Verbindung mit Bild 28

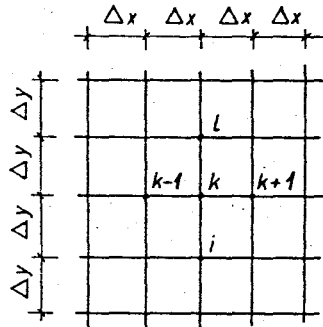


Bild 28

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_k \approx \frac{\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1}}{\Delta x^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_k \approx \frac{\varphi_l - 2\varphi_k + \varphi_i}{\Delta y^2}.$$

Vergl. [32] und [34].

Die Differentialgleichung (161) wird eine Differenzengleichung, so dass der Zusammenhang zwischen dem bezogenen Schubmodul G_k/G_0 und den Ordinaten φ_k der Torsionsfunktion in folgender Weise beschrieben wird:

$$\frac{\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1}}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_l - 2\varphi_k + \varphi_i}{\Delta y^2} = \frac{G_k}{G_0}. \quad (162)$$

Daraus entsteht an jedem freien Maschenknoten eine Differenzengleichung wie Gl. (162). Längs der Ränder ist φ_k gleich Null zu setzen.

Bei gleich grossen Abständen $\Delta x = \Delta y = s$ des Gitters ist

$$\varphi_{k+1} + \varphi_{k-1} + \varphi_l + \varphi_i - 4\varphi_k = \frac{G_k}{G_0} s^2. \quad (163)$$

In manchen praktischen Fällen sind die Ränder gekrümmt. Dabei kann nicht in die Maschenweite konstant gehalten werden (Bild 29). Für solche Gitterpunkte gilt in i. a.

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_k \approx 2 \frac{\Delta x_1 (\varphi_{k+1} - \varphi_k) - \Delta x_2 (\varphi_k - \varphi_{k-1})}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2)},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_k \approx 2 \frac{\Delta y_1 (\varphi_l - \varphi_k) - \Delta y_2 (\varphi_k - \varphi_i)}{\Delta y_1 \cdot \Delta y_2 (\Delta y_1 + \Delta y_2)}.$$

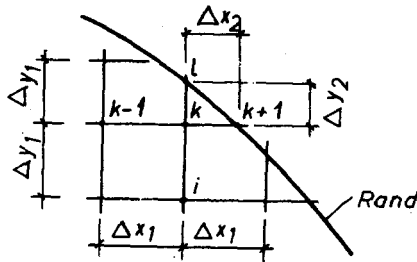


Bild 29

Je kleiner die Maschenweiten gewählt werden, um so genauer ist die Berechnung, um so grösser aber auch die Anzahl der linearen Gleichungen (162) und der Umfang der Zahlenrechnung.

Nach Auflösung der linearen Gleichungen (162) sind nun die gesuchten φ_k -Werte für alle Gitterknoten bekannt (längs der Ränder $\varphi_k = 0$). Mit Hilfe der SIMPSON'schen Regel kann das Volumen des über dem betrachteten Querschnittsanteil errichteten Spannungshügels $\int \varphi dF$ berechnet werden. Dann lässt sich aus Gl. (160) der Torsionssteifigkeitsanteil $(GI_t)_{\text{Beton}}$ sofort ausrechnen.

Für die praktische Berechnung ist dieser Weg zur Bestimmung von $(GI_t)_{\text{Beton}}$ langwierig. Man begnügt sich dann mit einem Näherungsverfahren, das im folgenden geschildert wird.

Danach lässt sich die Torsionssteifigkeit $(GI_t)_{\text{Beton}}$ berechnen aus dem Torsionswiderstand J_t des ungerissenen Querschnittsanteil gemäss der Elastizitätstheorie und aus dem Sekantenschub-

modul

$$G_{sek} = \frac{E_{sek}}{2(1 + \nu_{sek})} ,$$

der der Randfaserstauchung entspricht. Die I_t -werte sind in vielen Hand- und Lehrbüchern für verschiedene Querschnittsformen angegeben u.a. [32], [33], [35].

Nachstehend werden für einige Querschnitte die I_t -Werte wiedergegeben.

Für T-Querschnitt (Bild 30) gilt

$$J_t = J_{t_1} + J_{t_2} + \alpha D^4 , \quad (164)$$

wobei

$$J_{t_1} = a b^3 \left[\frac{1}{3} - 0,21 \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right] ,$$

$$J_{t_2} = c d^3 \left[\frac{1}{3} - 0,105 \frac{d}{c} \left(1 - \frac{d^4}{192c^4} \right) \right] ,$$

$$\alpha = \frac{t}{t_1} \left(0,15 + 0,1 \frac{r}{b} \right) ,$$

$$t = b \text{ falls } b < d ; \text{ sonst } t = d ,$$

$$t_1 = d \text{ falls } b < d ; \text{ sonst } t_1 = b .$$

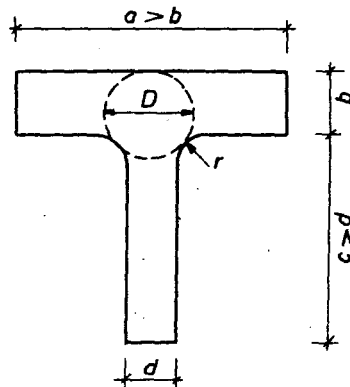


Bild 30

Für I-Querschnitt (Bild 31) gilt

$$J_t = J_{t_1} + J_{t_2} + J_{t_3} + \alpha_1 D_1^4 + \alpha_2 D_2^4, \quad (165)$$

wobei

$$J_{t_1} = a b^3 \left[\frac{1}{3} - 0,21 \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right],$$

$$J_{t_2} = \frac{1}{3} c d^3,$$

$$J_{t_3} = e f^3 \left[\frac{1}{3} - 0,21 \frac{f}{e} \left(1 - \frac{f^4}{12e^4} \right) \right],$$

$$\alpha_1 = \frac{t_1}{t_2} \left(0,15 + 0,1 \frac{r_1}{b} \right),$$

$$t_1 = b \quad \text{falls} \quad b < d; \text{sonst}$$

$$t_1 = d,$$

$$t_2 = d \quad \text{falls} \quad b < d; \text{sonst}$$

$$t_2 = b,$$

$$\alpha_2 = \frac{t_3}{t_4} \left(0,15 + 0,1 \frac{r_2}{f} \right),$$

$$t_3 = f \quad \text{falls} \quad f < d; \text{sonst}$$

$$t_3 = d,$$

$$t_4 = d \quad \text{falls} \quad f < d; \text{sonst}$$

$$t_4 = f.$$

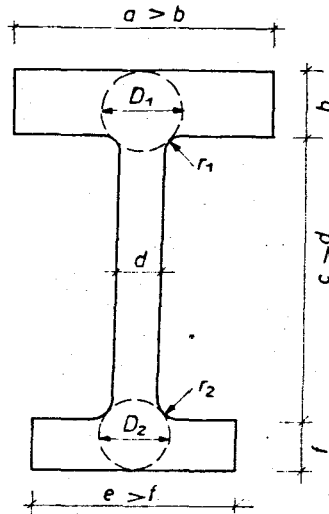


Bild 31

Durch die Grösse $(GI_t)_{\text{Bew.}}$ wird der Einfluss der Bewehrung auf die Torsionssteifigkeit berücksichtigt.

COWAN [36] drückt, in Abhängigkeit von der Drillung ϑ das Torsionsmoment für den mit Spiralen bewehrten Rechteckquerschnitt, wie folgt aus:

$$(M_t)_{\text{Bew.}} = \sqrt{2} \zeta b_k^2 d_k f_{e,s} E_e \frac{\vartheta}{S} \quad , \quad (166)$$

wobei

b_k = Breite des Kernquerschnitts

d_k = Höhe " "

$f_{e,s}$ = Stabquerschnitt der Spiralen

E_e = Verformungsmodul der Spiralenbewehrung

S = Ganghöhe der Schraubenlinie

ζ = Beiwert, abhängig vom d_k/b_k - Verhältnis

bedeuten.

Aus der bekannten Beziehung $GJ_t = \frac{M_t}{\vartheta}$ ergibt sich der Torsionssteifigkeitsanteil $(GI_t)_{\text{Bew.}}$ wie folgt:

$$(GJ_t)_{\text{Spiralen}} = \frac{\sqrt{2}}{S} \zeta b_k^2 d_k f_{e,s} E_e \quad . \quad (167)$$

Die ζ -Werte sind in Tafel XIII in Abhängigkeit von d_k/b_k wiedergegeben /vergl. 36 /.

T a f e l X I I I

d_k/b_k	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0
ζ	0,564	0,616	0,658	0,694	0,725	0,750	0,799	0,832

Bei Bügel- und Längsbewehrung wird Gl. (167) zu

$$(GJ_t)_{Bew.} = \zeta b_k^2 d_k f_{c,B} E_e / a \quad (168)$$

wobei

$$f_{c,B} = \text{Bügelquerschnitt}$$

$$a = \text{Bügelabstand}$$

bedeuten.

Die Anwendung dieser Gleichung setzt voraus, dass eine gleichmässig verteilte Längsbewehrung vorhanden ist, deren Querschnitt

$$\sum F_e \geq 2 \frac{f_{c,B}}{a} (b_k + d_k)$$

sein soll.

Wie Zahlenrechnungen zeigen, beträgt $(GI_t)_{Bew.}$ nur einen kleinen Bruchteil von $(GI_t)_{Beton}$. Daher wird $(GI_t)_{Bew.}$ in den meisten Fällen ausser acht gelassen.

7.233 Steifigkeitsverlauf längs der Balkenachse

Bei veränderlichen Biege- und Schubbeanspruchungen, wie z.B. der Fall eines Balkens unter Querbewehrung, sind die Biege- und Torsionssteifigkeiten längs der Balkenachse ebenfalls veränderlich.

Die in der vorliegenden Arbeit angegebenen Gleichungen zur Berechnung der kritischen Lasten sind unter der Voraussetzung konstanter Steifigkeiten längs der Balkenachse abgeleitet worden. Es erweist sich als notwendig, um diese Gleichung anwenden zu können, konstante Steifigkeitsgrößen in Rechnung

einzusetzen. Dies geschieht in der folgenden Weise:

Für die Ermittlung der seitlichen Biegesteifigkeit (EI_y) wird der Schnitt m - m (in Balkenmitte) als massgebend betrachtet, weil dieser Schnitt, der sich im Bereich des grössten seitlichen Momentes $M_z = EJ_y u''$ befindet, die kleinste Biegesteifigkeit (EI_y) besitzt (Bild 32).

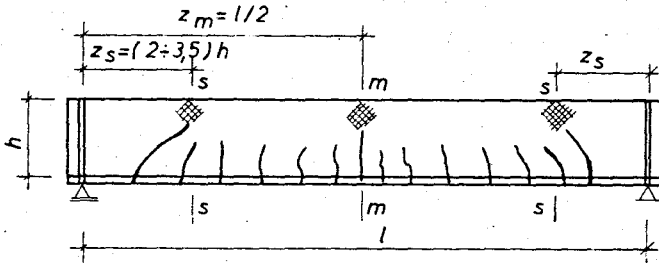


Bild 32 Rißbild

Der Ermittlung der Torsionssteifigkeit (GI_t) wird hingegen der Schnitt s-s (im Abstand $2h$ bis $3,5h$ vom Auflager) zugrunde gelegt [37], weil dieser Schnitt, der im Bereich des grossen Torsionsmomentes $M_z = -GI_t \phi'$ liegt, die kleinste Torsionssteifigkeit (GI_t) besitzt. Ein Biegeschubbruch kann durch Zerstörung der Betondruckzone am Ende eines Schubrisses eintreten. Für einfache Balken unter Gleichlast lässt sich die Lage des kritischen Schnittes s-s bei Schubbruchgefahr aus der Beziehung [37]

$$\text{krit.} \left(\frac{M}{Qh} \right) \approx 9 - 0,3 \frac{l}{h} \geq 2,5$$

(169)

bestimmen.

Die Nulllinienlage, die zur Berechnung der Steifigkeitsgrössen erforderlich ist, kann nach der Schubbruchtheorie nach WALTHER [37] bestimmt werden. Hierzu vergleiche man Beispiel 8 im Anhang.

Die auf diese Weise berechneten Steifigkeiten (EI_y)_{min} und (GI_t)_{min} stellen die kleinsten Werte dar, die überhaupt längs der Balkenachse existieren. Dabei bleibt man auf der sicheren Seite. In der Tat besitzen die in der Nähe von Auflagern liegenden und nicht mehr gerissenen Querschnitte relativ höhere Steifigkeiten als die übrigen, die mehr oder minder stark beansprucht sind (s. Bild 33).

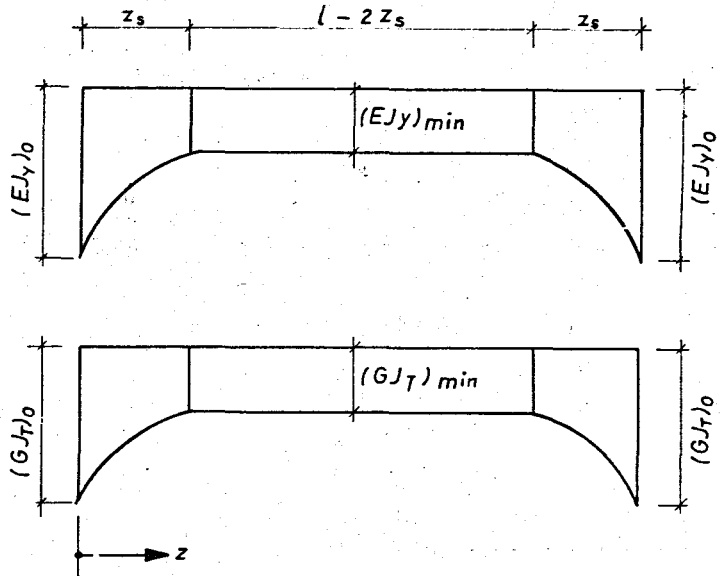


Bild 33 Steifigkeitsverlauf

Im folgenden soll versucht werden zu zeigen, wie gross der Steifigkeitszuwachs gegenüber den minimalen Werten $(EI_y)_{\min}$ und $(GI_T)_{\min}$ betragen kann, wenn diese Tatsache in der Rechnung berücksichtigt wird.

Der Untersuchung wird ein Balken unter Gleichlast mit $h=1/12$ und $z_s = 3h = 1/4$ zugrunde gelegt. Es wird angenommen, dass der Zuwachs der minimalen Steifigkeiten $(EI_y)_{\min}$ bzw. $(GI_T)_{\min}$ auf die max. Werte $(EI_y)_0$ bzw. $(GI_T)_0$ der Einfachheit halber nach einer Sinus-Funktion erfolgt.

Aus dem Ausdruck (9) für die Formänderungsarbeit sind die Anteile $\int_0^l (EI_y)_z u_s''^2 dz$; $\int_0^l (GI_T)_z \varphi'^2 dz$

zu betrachten. Um die Übersichtlichkeit der Berechnung beizubehalten, wird ferner vorausgesetzt, dass die Verschiebung u_s und die Verdrehung φ durch einfache Sinus-Funktionen beschrieben werden dürfen

$$u_s = a_1 \sin \frac{\pi z}{l} ; \quad \varphi = c_1 \sin \frac{\pi z}{l} \quad .$$

Gemäss der vorstehenden Ausführungen lässt sich der Verlauf der Biegesteifigkeit im Bereich $0 \leq z \leq l/4$ durch den Ansatz

$$B_z = B_0 - (B_0 - B_m) \sin \frac{2\pi z}{l} \quad (170 \text{ a})$$

ausdrücken. Sinngemäss gilt für den Verlauf der Torsionssteifigkeit

$$C_z = C_0 - (C_0 - C_m) \sin \frac{2\pi z}{l} \quad (170 \text{ b})$$

Dabei bedeuten

$$\begin{aligned} B_0 &= (EJ_y)_0 & B_m &= (EJ_y)_{\min} & B_z &= (EJ_y)_z \\ C_0 &= (GJ_t)_0 & C_m &= (GJ_t)_{\min} & C_z &= (GJ_t)_z \end{aligned}$$

Die Auswertung der obigen Integrale unter Beachtung der Gln. (170) liefert für die Biegesteifigkeit

$$a^2 \frac{\pi^4}{l^3} \left[B_0 \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{8\pi} \right) + B_m \left(\frac{3}{8\pi} + \frac{1}{8} \right) \right] \quad (171 \text{ a})$$

und für die Torsionssteifigkeit

$$c^2 \frac{\pi^2}{l} \left[C_0 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi} \right) + C_m \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4\pi} \right) \right] \quad (171 \text{ b})$$

Analog erhält man, wenn

$$\begin{aligned} B_z &= B_0 = \text{const.} & C_z &= C_0 = \text{const.} \\ \text{für die Biegesteifigkeit} & a^2 \frac{\pi^4}{l^3} \cdot \frac{B_0}{4} \\ \text{für die Torsionssteifigkeit} & c^2 \frac{\pi^2}{l} \cdot \frac{C_0}{4} \end{aligned} \quad (172)$$

Durch Dividieren des Ausdruckes (171) durch (172) ergibt sich ein Beiwert, welcher, wenn mit der max. Steifigkeit multipliziert wird, die Ersatzsteifigkeit wie folgt liefert:

$$(EJ_y)_{\text{ers.}} = (EJ_y)_0 \left[0,023 + 0,977 \frac{(EJ_y)_{\min}}{(EJ_y)_0} \right] \quad (173)$$

$$(GJ_t)_{\text{ers.}} = (GJ_t)_0 \left[0,180 + 0,820 \frac{(GJ_t)_{\min}}{(GJ_t)_0} \right] \quad (174)$$

Die Gln. (173) und (174) gelten nur für den behandelten Fall unter den gemachten Voraussetzungen. Für andere Fälle lassen sich sinngemäss ähnliche Formeln ableiten.

7.234 Lage des Schubmittelpunktes

Der Schubmittelpunkt M ist bekanntliche sowohl der Lastangriffspunkt bei verdrehungsfreier Biegung als auch der Drehpunkt bei reiner Verdrehung. Bei offenen, dünnwandigen Querschnitten aus druck- und zugfestem Material lässt sich die Lage des Schubmittelpunktes y_M leicht bestimmen.

Schon bei dickwandigen Querschnitten aus ideal elastischem Baustoff bereitet die Bestimmung von M erhebliche Schwierigkeiten.

Bei Stahlbetonquerschnitten ist das Problem noch schwieriger, weil die Lage des Schubmittelpunktes von vielen Faktoren beeinflusst werden kann, die im folgenden etwas näher betrachtet werden sollen. Die aus der Verdrillung resultierenden Schubspannungen können hauptsächlich nur von der ungerissenen Betonzone aufgenommen werden. Dabei wird die Beteiligung der eventuell zwischen den Rissen verbleibenden Betonanteile an der Aufnahme der Torsionsschubspannungen vernachlässigt. Danach darf der Schubmittelpunkt so bestimmt werden, dass nur die ungerissene Betonzone in Frage kommt. Der Einfluss der Stahlbewehrung auf die Lage des Schubmittelpunktes ist schon von MORICE [38] bei Rechteckquerschnitten untersucht worden. Die unsymmetrisch gelegenen Stahleinlagen verursachen eine Verschiebung des Drillruhepunktes M zur Seite der Stahlbewehrung. Aus der erwähnten Untersuchung von MORICE lässt sich erkennen, dass der Einfluss der Bewehrung auf die Lage von M vernachlässigbar klein ist. Das plastische Verhalten des Betons in der Biegedruckzone eines Querschnittes verändert ebenfalls die nach der Elastizitätstheorie ermittelte Lage von M (Verschiebung zur Nulllinienseite), denn die äusserst liegenden, stark beanspruchten Fasern der Druckzone sind in Hinsicht der Aufnehmbarkeit von Schubspannungen schwächer als die inneren, geringer beanspruchten Fasern.

Die Lage des Schubmittelpunktes von dickwandigen Querschnitten aus elastischem Material kann nach der Dissertation von SOWA [39] bestimmt werden.

Da die ungenaue Bestimmung der Lage von M nur unwesentlich die kritische Last eines Balkens mit dickwandigem Querschnitt ändern kann, so lohnt sich nicht, eine genaue Untersuchung durchzuführen (vergl. Beispiel 8). Deshalb wird hier der Bestimmung von M der ungerissene Betonquerschnittsanteil, und zwar im Schnitt s - s ($z_s = 2h \dots 3,5h$) zugrunde gelegt. Dabei werden die Einflüsse der Stahlbewehrung und der Plastizität des Betons auf die Schubmittelpunktlage vernachlässigt.

7.235 r_x - Grösse

Für den Anteil des Torsionsmomentes $M_\xi^{(a)}$ infolge der Schrägstellung der Längsfasern beim Verdrillen gilt [1]:

$$M_\xi^{(a)} = \varphi' \int_F \sigma (x^2 + y^2) dF$$

Nach der Elastizitätstheorie darf für die Spannung angesetzt werden:

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{I_x}$$

Dann ergibt sich

$$M_\xi^{(a)} = \varphi' \frac{M_x}{I_x} \int (x^2 + y^2) y dF = \varphi' M_x r_x$$

Daraus erhält man

$$r_x = \frac{1}{M_x} \left[\int_F \sigma x^2 dF + \int_F \sigma y^2 dF \right], \quad (175)$$

wobei M_x = äusseres Biegemoment im Schnitt m-m

(z.B. bei Gleichlast $M_x = pl^2/8$)

σ = vorhandene Spannung im Schnitt m-m infolge M_x bedeuten.

Gemäss Bild 34 schreibt man:

$$\begin{aligned} \int \sigma x^2 dF &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta_i b_i^3}{12} \sigma_{bi} \right) + \frac{F_e' b_e'^2}{12} \sigma_e' - \frac{F_e b_e^2}{12} \sigma_e, \\ \int \sigma y^2 dF &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{b_i \delta_i^3}{12} \sigma_{bi} \right) + \sum_{i=1}^n (b_i \delta_i y_{bi}^2 \sigma_{bi}) + \\ &\quad + F_e' y_e'^2 \sigma_e' - F_e y_e^2 \sigma_e. \end{aligned}$$

Die Werte σ_{bi} , σ_e' und σ_e sind ohne Vorzeichen einzusetzen.

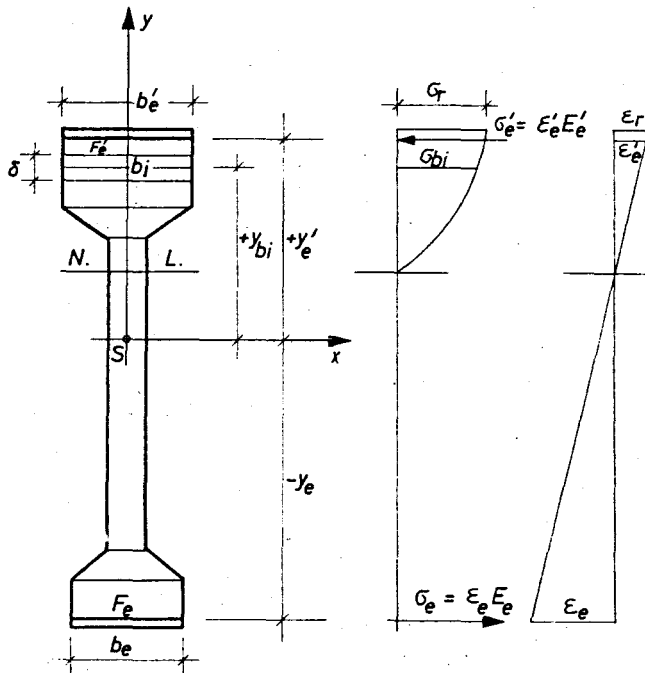


Bild 34 Spannungsverteilung an Stelle $z=l/2$

7.236 e- und f- Grössen

Der Schwerpunkt des Gesamtbetonquerschnittes wird als Bezugspunkt gewählt.

Die Lage des Schubmittelpunktes und des Lastangriffspunktes wird durch den Abstand y_N bzw. e von der Bezugsachse x festgelegt. Durch den Abstand f von dem Lastangriffspunkt wird die Lage des Aufhängepunktes bestimmt (Bild 35)

7.24 Sicherheitsbetrachtungen

Die Bemessung für Biegung mit und ohne Druckkraft sieht einen globalen Sicherheitsbeiwert von 1,75 vor, der lediglich in einem Bereich zur Abwehr der Gefahr eines unangekündigten Bruches auf 2,1 erhöht wird. Deutliche Rissbildung wird als hinreichende

Ankündigung eines bevorstehenden oder drohenden Bruches angesehen. Als Vergleichsgrösse für die Rissbildung kann zweifellos die Dehnung der Stahleinlagen dienen, weswegen für Stahldehnung $\geq 3\text{‰}$ der Sicherheitsbeiwert mit 1,75 festgelegt wurde. Zwischen Stahldehnungen von 3‰ und 0‰ steigt der Sicherheitsbeiwert linear auf 2,1 an und bleibt dann in dieser Höhe konstant.

Der Kippvorgang klassischer Art ist zweifellos ein kurzzeitig ablaufender Vorgang. Dabei liegt die Gefahr eines unangekündigten Bruches vor. Daher empfiehlt es sich, einen Sicherheitsbeiwert gegen Auskippen von 2,5 einzuführen. Die Erhöhung der Kippsicherheitszahl von 2,1 auf 2,5 ist erforderlich, da unvermeidliche kleine Unsymmetrie in Balkenabmessungen sowie in Last zur Herabsetzung der theoretischen kritischen Last führt.

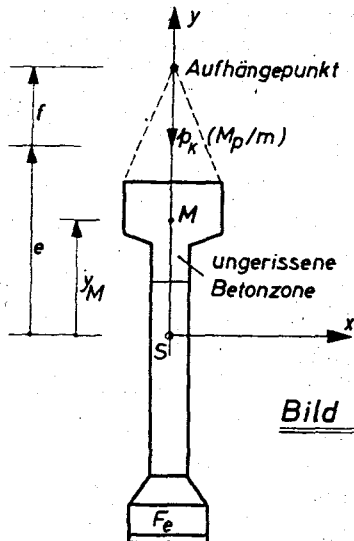


Bild 35

7.25 Rechengang

Die Berechnung der Kipplast eines Stahlbetonbalkens kann nur iterativ erfolgen, weil diese von den zunächst unbekannten Steifigkeiten (EI_y) und (GI_t) abhängig ist. Der Rechenaufwand wird wesentlich verringert, wenn man nach dem folgenden Schema verfährt:

I.1 Für den Schnitt m-m in der Balkenmitte ($z = 1/2$) wird aus den Gleichgewichtsbedingungen und der Hypothese von NAVIER-BERNOULLI das aufnehmbare Moment M_m bei anwachsenden Betonstauchungen ϵ_b ermittelt.

Nun sind der Nulllinienabstand x und die Stahldehnung ϵ_e bekannt. Die dem aufnehmbaren Moment zugehörige Last (q_l) ergibt sich bei Gleichlast

$$q_l = \frac{8 M_m}{l}$$

wobei l die Balkenstützweite bedeutet. Zweckmässig werden die errechneten Werte in einer Tafel zusammengestellt.

Betonstauchung	Nulllinienabstand	Stahldehnung	aufnehmbares Moment	zugehörige Last
ϵ_b (‰)	x (cm)	ϵ_e (‰)	M_m (kp.cm)	q_l (kp)

I.2 Für jede vorgegebene Betonstauchung ϵ_b und die zugehörige Stahldehnung ϵ_e kann aus der Spannungs-Dehnungs-Linie des Betons und des Stahls der Verformungsmodul E in jedem Punkt des betrachteten Querschnittes m-m abgelesen werden. Die seitlichen Biegesteifigkeiten (EI_y) können aus Gl.(152) für die vorgegebenen ϵ_b berechnet werden, nachdem die Lage der Nulllinie n_o-n_o aus Gl. (149) bestimmt wurde. Nun kann die Beziehung zwischen der Last (q_l) und der Biegesteifigkeit (EI_y) zeichnerisch aufgestellt werden.

I.3 Mit der bekannten Spannungsverteilung in der Betondruckzone sowie der Stahlspannung lässt sich die Grösse r_x aus Gl.(175) für die verschiedenen Belastungen ohne weiteres bestimmen.

II.1 Zunächst ist die Lage des kritischen Schnittes s-s aus Gl. (169) zu bestimmen.

Aus den Gleichgewichts- und den von WALTHER erweiterten Verformungsbedingungen lassen sich die im Schnitt s-s auftretenden Momente M_s für anwachsende Betonstauchungen ermitteln. (vergl. Beisp. 8).

Ebenfalls werden der Nulllinienabstand x und die Stahldehnung ϵ_e bekannt. Die dem auftretenden Moment zugehörige Last lässt sich leicht berechnen.

Zweckmässig werden die errechneten Werte in einer Tafel zusammengestellt.

Betonstau- chung	Nulllinien- abstand	Stahldeh- nung	aufnehmbares Moment	zugehörige Last
$\epsilon_b (\text{‰})$	$X (\text{cm})$	$\epsilon_e (\text{‰})$	$M_s (\text{kp}\cdot\text{cm})$	$q_l (\text{kp})$

II.2 Da nun die Dehnungsverteilung im s-s bekannt ist, lässt sich aus der $\sigma_b - \epsilon_b$ -Linie des Betons der Sekantenmodul E_{sek} ermitteln, und aus Bild 23 die zugehörige Querdehnungszahl ν_{sek} bestimmen. Nun kann der Schubmodul aus $G_{sek} = \frac{E_{sek}}{2(1 + \nu_{sek})}$ ermittelt werden.

Die Torsionssteifigkeit (GI_t) setzt sich aus $(GI_t)_{Beton} + (GI_t)_{Bew.}$ zusammen.

$$(GI_t)_{Beton} = G_{sek} I_t,$$

wobei I_t der Torsionswiderstand des ungerissenen Querschnittsanteils bedeutet.

I_t kann z.B. für T-Querschnitt aus Formel (164) bzw. für I-Querschnitt aus Gl. (165) ermittelt werden.

$(GI_t)_{Bew.}$ kann ebenfalls aus Gl. (168) bestimmt werden, aber meistens darf sie vernachlässigt werden. Nun kann die Beziehung zwischen der Last (q_l) und der Torsionssteifigkeit GI_t zeichnerisch aufgestellt werden.

II.3 Für den ungerissenen Anteil des betrachteten Querschnittes s-s kann die Lage des Schubmittelpunktes bei verschiedenen Belastungsgraden ermittelt werden.

III. Nun sind die gesuchten Beziehungen zwischen (EI_y) , (GI_t) , r_x , y_M und der Last (q_l) vorhanden. Die Kipplast ist, wie folgt, iterativ zu bestimmen.

Setzt man in die Kippgleichung des vorliegenden Falles einen abgeschätzten Wert für die Kipplast mit seinen zugehörigen Steifigkeiten ein, so erhält man als richtige Kipplast diejenige Last, welche die Kippgleichung erfüllt.

7.26 Näherungsverfahren

7.261 Verfahren von PETERSSON [14]

Zur Berechnung der Kipplast eines Stahlbetonbalkens gibt PETERSSON reduzierte E-Moduli an, die von den Betongütern, jedoch nicht von der Grösse der Beanspruchung, abhängig sind. Sie sind in Tafel XIV wiedergegeben.

T a f e l XIV

Betongüte (Kp/cm ²)	150	200-250	300-350	400-450	500-550	600
\bar{E} (Kp/cm ²)	70000	85000	105000	120000	130000	140000

Für den Schubmodul gilt die Beziehung $\bar{G} = 0,5 \bar{E}$.

Durch die reduzierten E- und G-Moduli sollen die Plastizität und die Rissbildung des Betons berücksichtigt werden.

Der Bestimmung des Trägheitsmomentes I_y und des Torsionswiderstandes I_t wird der Gesamtbetonquerschnitt (ohne Risse und Bewehrung) zugrunde gelegt. Nach PETERSSON ist eine Sicherheitszahl von 3 erforderlich.

7.262 Verfahren von HANSELL-WINTER [19]

HANSELL und WINTER berücksichtigen die Plastizität des Betons in der Weise, dass der Elastizitätsmodul E und der Schubmodul G durch Sekantenmoduli E_{sek} und $G_{sek} = \frac{E_{sek}}{2(1+\nu)}$ ersetzt werden, die der auftretenden Randfaserstauchung zugehören. Der Berechnung der Steifigkeit (EI_y und GI_t) wird die Betondruckzone zugrunde gelegt. Dabei ist der Einfluss der Bewehrung auf die Steifigkeitswerte zu vernachlässigen. Z.B. gilt für den Rechteckquerschnitt

$$EI_y = E_{sek} \cdot \frac{x b^3}{12},$$

$$GI_t = G_{sek} \cdot \frac{b^3 x}{3} \left(1 - 0,35 \frac{b}{x}\right)^2 \quad \text{für } x \geq b,$$

wobei

b = Querschnittsbreite,

x = Höhe der Biegedruckzone.

7.263 Verfahren von SIEV [20]

Für Stahlbeton-Rechteckquerschnitte gibt SIEV verschiedene Formeln zur Berechnung der seitlichen Steifigkeit EJ_y im elastischen Zustand mit Rissbildung sowie im plastischen Zustand mit Rissbildung unter idealisierten Annahmen bezüglich der σ - ϵ -Linie sowohl für Beton als auch für Stahl an. Im elastischen Zustand gilt (Bild 36):

$$EJ_y = \frac{M}{\sigma_{br}} \frac{x E_b}{z} \left(\frac{b^2}{6x} + \frac{b_s^2}{4(h-x)} \right)$$

Im plastischen Zustand:

$$EJ_y = \frac{b^2 M}{12 \alpha E_{b,r} (h - \alpha' x)}$$

Dabei bedeuten

M = das vorhandene Biegemoment,

σ_{br} = die maximal auftretende Betondruckspannung,

z = Hebelarm der inneren Kräfte,

E_b = Elastizitätsmodul des Betons,

α = Völligkeitsgrad,

α' = Hebelbeiwert.

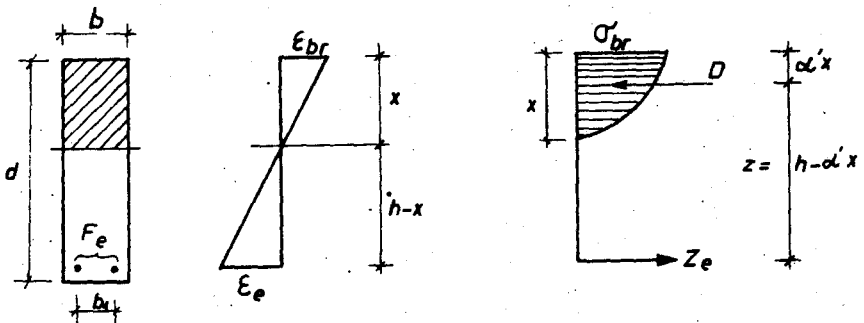


Bild 36

Die vorstehenden Formeln lassen sich in der allgemeinen Form schreiben, und zwar wie folgt:

$$EJ_y = \frac{x b^3}{12} E_{sek} + \left(\frac{b^4}{2}\right)^2 F_e E_e$$

Das heisst, dass nur die Druckzone von dem Gesamtbetonquerschnitt als wirksamer Querschnittsanteil in die Rechnung einzusetzen ist.

Hingegen wird der Berechnung der Torsionssteifigkeit der Gesamtbetonquerschnitt (ohne Berücksichtigung der Bewehrung) zugrunde gelegt. z.B. gilt für Rechteckquerschnitt

$$J_t = \frac{b^3 d}{3} \left(1 - 0,35 \frac{b}{d}\right)^2$$

Eine direkte Ermittlung der Kipplast kann sogar für Balken mit Rechteckquerschnitt nicht vorgegeben werden, da die Biegesteifigkeit von der zunächst unbekannten kritischen Belastung abhängig ist.

7.264 Verfahren von LEBELLE [12]

LEBELLE gibt folgende Empfehlungen für die Bestimmung des E-Moduls bei Spannbetonträgern an. Für Kurzzeitbelastungen (bis zu 4 Stunden Dauer) ist der E-Modul mit der Grösse $E \text{ (kp/cm}^2\text{)} = 18000 \left(1 - \frac{\sigma_b}{\beta_p}\right) \sqrt{\beta_p}$ einzusetzen, wobei β_p die dem Alter des Betons entsprechende Prismenfestigkeit bedeutet. Bei einer Belastungsdauer von t Stunden ist für $4 < t < 100$ der E-Modul mit dem Faktor $1 - \frac{t-4}{200}$ zu multiplizieren.

Bei Dauerbeanspruchung kann mit $E = 6000 \sqrt{\beta_{p_{90}}}$ gerechnet werden. In allen Fällen ist für Schubmodul $G = 0,4 E$ zu setzen.

Das Trägheitsmoment I_y ist für den Gesamtquerschnitt ohne Berücksichtigung eines Abzuges für Spannkanaäle, aber mit n -facher schlaffer Längsbewehrung zu ermitteln.

Der Drillwiderstand I_t wird ohne Berücksichtigung der schlaffen Längsbewehrung berechnet, in dem man in üblicher Weise die Werte der einzelnen Querschnitte summiert.

LEBELLE empfiehlt eine Sicherheitszahl von 3 anzunehmen.

7.265 Kritische Betrachtungen zu den Näherungsverfahren

Gibt man den E-Modul nur in Abhängigkeit der Betongüte an, wie im Verfahren von PETERSSON, so stellt das Verfahren eine grobe

Näherung dar, weil der E-Modul in erster Linie von der Höhe der Beanspruchung abhängt. Wird hingegen, wie bei den Verfahren von SIEV, HANSELL/WINTER oder LEBELIE, der E-Modul in Abhängigkeit von den auftretenden Spannungen ausgedrückt, so muss die Bestimmung der Kipplast auf dem iterativen Wege erfolgen. Dadurch erschwert sich die Berechnung der Kipplast. Bei einigen Verfahren (FETTERSSON und LEBELLE) wird der Berechnung von I_y der Gesamtbetonquerschnitt mit oder ohne Längsbewehrung wie im Stadium I zugrunde gelegt. Meistens befindet sich der Balken unter der Kipplast schon im Zustand II (mit Rissen). Die Steifigkeit EI_y nimmt infolge der Risse sehr stark ab. Aber die Steifigkeitsabnahme kann in der Rechnung durch die festgelegten kleineren E-Moduln berücksichtigt werden. Sinngemäss gilt dasselbe für die Torsionssteifigkeit. Wird nur die Betondruckzone zur Berechnung der Biege- und Torsionssteifigkeit zugrunde gelegt, wie bei den Verfahren von HANSELL / WINTER, so stellen die erhaltenen Steifigkeiten die kleinsten Werte dar.

8. Experimentelle Untersuchungen

8.1 Vorwort

Die strenge elastizitätstheoretische Lösung des Kipp-Problems erfordert einen ausserordentlich hohen mathematischen Aufwand. Daher wurden für die hier behandelte Theorie über die Kippstabilität vereinfachende Voraussetzungen gemacht, deren Einflüsse auf die Untersuchungsergebnisse erläutert werden sollen.

Es wurden linearisierte Gleichungen in Ansatz gebracht. Der Krümmungsradius der elastischen Linie wurde mit $\varrho = \frac{1}{u''}$ angesetzt statt des genauen Wertes $\varrho = \frac{1}{u''} [1 + (u')^2]^{3/2}$. Dadurch wurde eine Verzweigungslast gefunden, die nur für sehr kleine Deformationen zur Geltung kommt. Das Mass der Ausbiegung blieb dabei unbestimmt. Ebenfalls wurde der Einfluss der von den Querkraften hervorgerufenen Schubspannungen auf den Verformungszustand vernachlässigt, da bei offenen Querschnitten und nicht gedrungenen Trägern die Schubverzerrung meistens bedeutungslos ist. Zur weiteren Vereinfachung wurde auch die Hauptkrümmung vernachlässigt. Das bedeutet, dass der Einfluss der Krümmung in der senkrechten Richtung auf das seitliche Ausweichen ausser acht bleibt. In Wirklichkeit erfährt der Träger vor Erreichen des kritischen Zustandes in der Symmetrieebene endliche Verformungen. Für den Fall des mit zwei gleichen Endmomenten belasteten Balkens, ermittelte CHWALLA [40] das Kippmoment unter Berücksichtigung der Hauptkrümmung und kam zum Schluss, dass dieser Einfluss für I-Träger vernachlässigt werden darf. Dies gilt offensichtlich für solche Querschnitte, deren $EI_x \gg EI_y$ ist. Es fragt sich, ob die Vernachlässigung der Hauptkrümmung bei flächenartigen Trägern, wobei $EI_x < EI_y$, gerechtfertigt ist.

Da der Balken nie mathematisch gerade und unverdreht ist, der Kraftangriff nie genau in der Symmetrieebene erfolgt, treten wiederum zusätzlich, endlich grosse Verformungen auf. Die Bestimmung der kritischen Last bei diesen unvermeidbaren anfänglichen Verformungen stösst hier auf erhebliche Schwierigkeiten. Diese Aufgabe könnte näherungsweise als Spannungsproblem zweiter Ordnung behandelt werden [41]. Es wurde ebenfalls vorausgesetzt, dass unter der Belastung die Querschnittsgestalt erhalten bleibt.

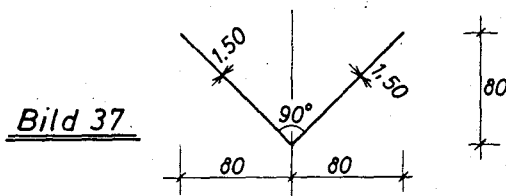
Sind die einzelnen Scheiben des Querschnittes sehr dünn, so kann sich die Querschnittsform während der Verformung merklich ändern. Dadurch kann die Spannungsverteilung stark beeinflusst werden. Ferner wurde angenommen, dass Beulerscheinungen beim Kippvorgang ausgeschaltet sind. Oft ist eine scharfe Trennung der beiden Vorgänge nicht möglich.

Trotz dieser vereinfachenden Annahmen ist eine allgemeine Lösung der Differentialgleichungen des Kipp-Problems ausserordentlich schwierig bzw. unmöglich. Daher wurde in der vorliegenden Arbeit von der Energiemethode unter Verwendung relativ einfacher Lösungsansätze zur Beschreibung der Kippfigur Gebrauch gemacht. Hierbei wurde in Kauf genommen, dass die durch die Energiemethode ermittelten kritischen Lasten etwas grösser sind als die exakten Werte.

Es lag deshalb nahe, die Genauigkeit der gewonnenen Lösungen im Experiment zu überprüfen. Bislang sind nur wenige Versuchsergebnisse über das Kippverhalten von Balken bekannt. Es sei in diesem Zusammenhang auf die Versuche von FLINT hingewiesen [vergl. 2]. Hierbei handelte es sich um gabelgelagerte I-Balken unter Gleichlast. Die Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit der Kipptheorie ist sehr gut.

8.2 Beschreibung der Versuchs- und Belastungseinrichtungen

Es wurden in der Hauptversuchsserie 6 Versuchsträger untersucht, davon 4 Versuchskörper ohne Endscheiben und 2 mit Endscheiben. Alle Versuchsträger hatten eine Stützweite von 954 mm und einen V-förmigen Querschnitt, dessen Abmessungen in Bild 37 dargestellt sind.



Die Abmessungen wurden so gewählt, dass die an der Stabilitätsgrenze auftretenden Spannungen weit unter der Proportionalitätsgrenze des Materials lagen. Als geeignetes Material für die Hauptversuchsträger wurde Alu 99 F 8 (DIN 1712 Bl.3) verwendet. Aus Materialuntersuchungen wurden die mechanischen Eigenschaften des Alu 99 F 8 ermittelt (Tafel XV)

T a f e l X V

Bezeichnung nach DIN 1712 Bl. 3	0,2-Grenze $\sigma_{0,2}$ (kp/mm ²)	Zugfestigkeit σ_B (kp/mm ²)	Dehnung $\delta_{10\%}$	E kp/mm ²	G kp/mm ²
Alu 99 F 8	2	8	25	6800	2700

Aufgrund einiger Vorversuche mit verschiedenen Werkstoffen (St.37, Alu 99 F 11, Alu 99 F 8) wurde sich für die Durchführung der Hauptversuche für Alu 99 F 8 entschieden. Als Ersatz für die gleichmässig verteilte Streckenlast wurden die Versuchsmodelle mit 8 Einzellasten an jeder Seite des Querschnittes belastet (vergl. Bild 38 und 39). Die Lasten wurden mittels Büchsen eingetragen, die an hochfesten Stahldrähten (\varnothing 0,6 mm) hängen (Bild 40).

Die Laststeigerung erfolgte durch Zugabe von Stahlschrott in den Büchsen. Be- und Entlastung wurde mittels einer Hubeinrichtung in Gestalt eines ölhydraulischen Wagenhebers durchgeführt (vergl. Bild 39).

Durch die hier beschriebenen Belastungseinrichtungen wurde gewährleistet, dass die eingetragenen Lasten bei allen Verformungszuständen immer in lotrechter Richtung wirkten.

Die Prüfkörper wurden an beiden Enden so aufgehängt, dass deren Entfernung in Richtung der Trägerachse genau der Stützweite entsprach.

Die Aufhängepunkte der Prüfkörper ohne Endscheiben wurden als Gelenke ausgebildet, so dass sich die Prüfkörper einwandfrei um diese verdrehen konnten (Bild 41).

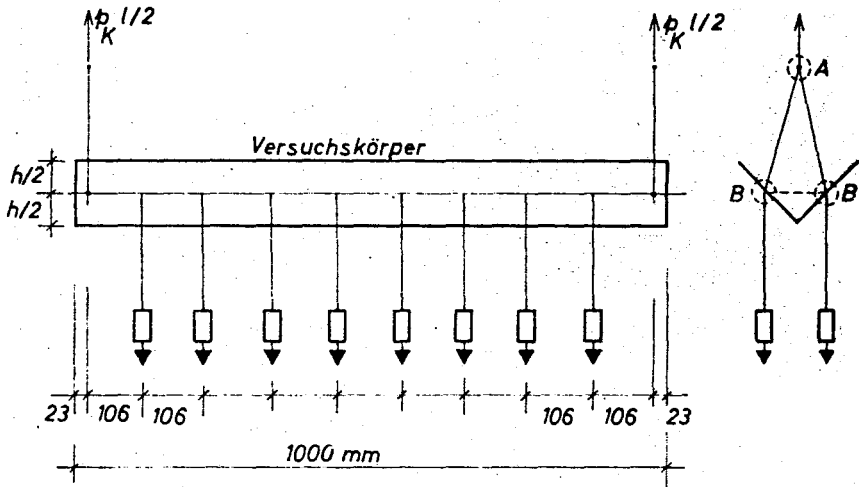


Bild 38 Statisches System des Versuchskörpers ohne Endscheiben.

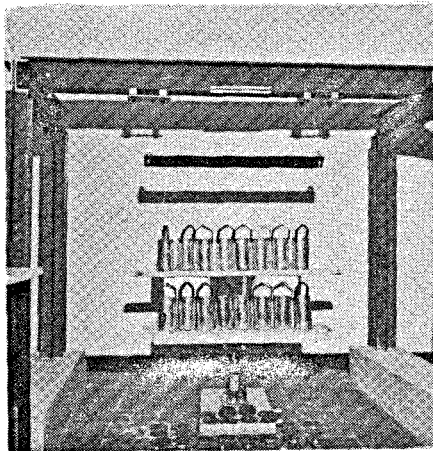


Bild 39

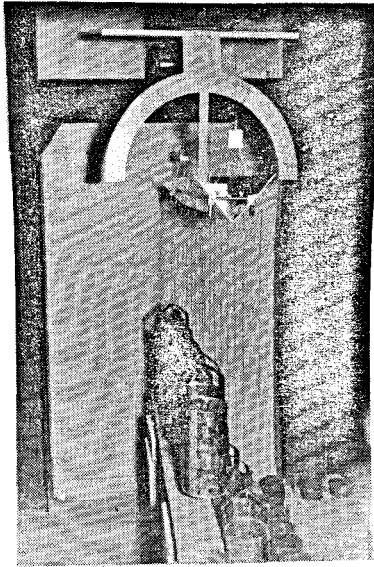


Bild 40

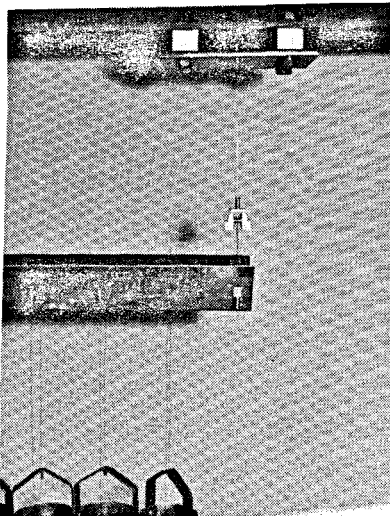


Bild 41

Durch ein Kugellager wurde der Reibungseinfluss auf ein Minimum herabgesetzt. Die Wellenachse des Kugellagers wurde als theoretischer Aufhängepunkt angenommen. Dabei war die Aufhängehöhe \tilde{f} von der Wellenachse bis zur Querschnittsschwerachse zu messen (Bild 42).

Es war notwendig, eine horizontale Druckstrebe zwischen die Punkte B-B gelenkig einzubauen, um die Ablenkkraft infolge der Richtungsänderung der Auflagerkräfte aufzunehmen. Danach wurden die Trägerenden weitgehend von Störungen frei gehalten, gleichzeitig war die Verwölbung der Endquerschnitte nicht verhindert.

Zwei Versuchskörper wurden mit Endscheiben versehen, um den Einfluss der Endscheiben auf den Kippvorgang zu studieren. Zu diesem Zweck dienten zwei Flatten aus Leichtmetall von 10 mm Dicke. An den beiden Trägerenden wurden je eine Platte mit Kunststoffkleber x-60 angeklebt (Bild 43 und 44). Der Aufhängepunkt lag gemäss Bild 43 in der Endplatte. Ferner erhielten die Endscheiben eine V-förmige Rille von 2 mm Tiefe, damit ein wirkungsvoller Anschluss mit dem Versuchskörper gewährleistet wurde.

Mit Hilfe eines am Riegel des Prüfgestells befestigten Winkelmessers konnte man die Verdrehung des Mittelquerschnittes des Prüfträgers verfolgen. (vergl. Bild 45).

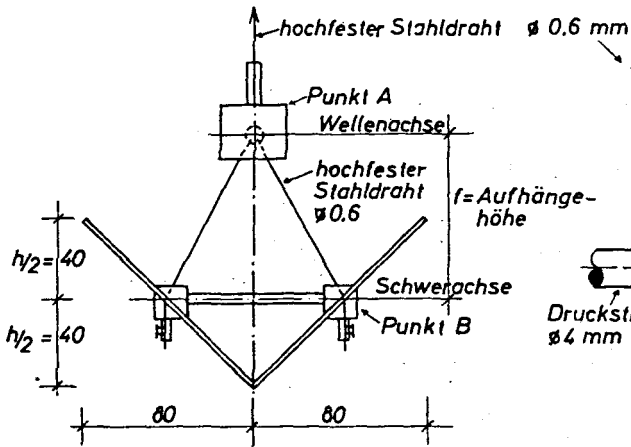


Bild 42 a Aufhängevorrichtung für
Prüfkörper ohne Endscheiben.

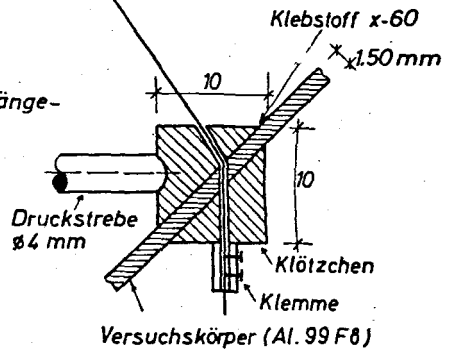


Bild 42 b Detail des
Punktes „B“

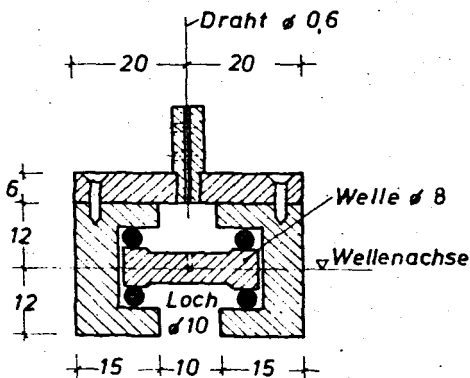


Bild 42c Detail des Punktes A

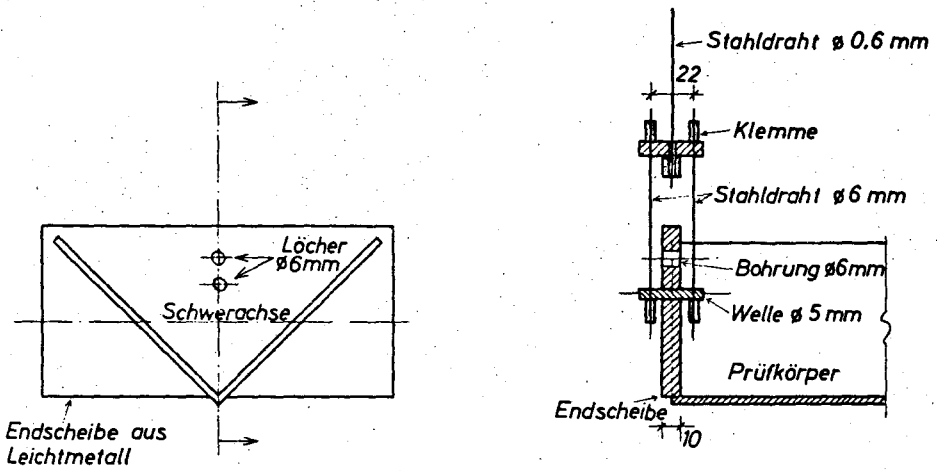


Bild 43. Aufhängevorrichtung für Prüfkörper mit Endscheiben

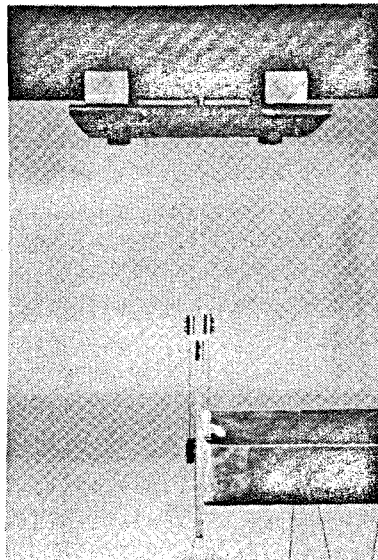


Bild 44

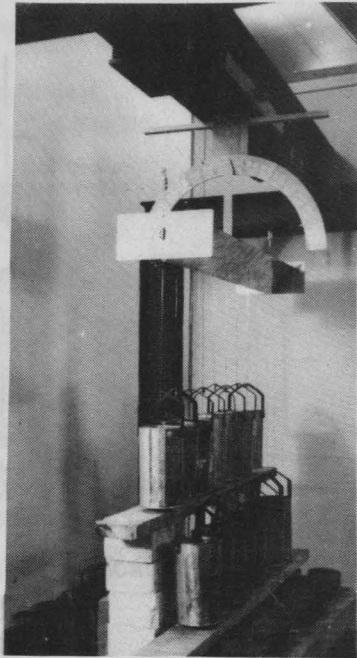


Bild 45

8.3 Versuchsdurchführung

Die Belastung der Versuchsträger erfolgte stufenweise, wobei zunächst Gewichte von je 500 p bzw. 100 p in jede Büchse eingelegt wurden. In der Nähe der Kipplast wurde die weitere Belastung durch Schrotteisen aufgebracht. Das Gewicht der Lasteintragungskonstruktion wurde entsprechend berücksichtigt.

Mit Erhöhung der Laststufen war eine deutlich zunehmende Empfindlichkeit des Versuchskörpers gegen Störkräfte zu beobachten.

Die kritische Last war eindeutig dadurch gekennzeichnet, dass es nicht mehr möglich war, eine eindeutige Gleichgewichtslage des Versuchskörpers zu finden. Einer über der kritischen Grenze liegenden Belastung konnten mehrere Gleichgewichtslagen zugeordnet werden, deren Beständigkeit gegenüber geringen Störungen jedoch

verschieden gross war.

8.4 Versuchsergebnisse

Es wurden insgesamt 6 Versuchsmodelle untersucht. Dabei wurden die Aufhängehöhen und die Randbedingungen variiert.

Zu der 1. Gruppe gehörten 4 Versuche mit Versuchskörpern ohne Endscheiben (vergl. Bild 40).

Zur 2. Gruppe gehörten 2 Versuche mit Versuchskörpern mit Endscheiben (vergl. Bild 45). An diesen Versuchsmodellen sollte der Einfluss der Verwölbungsbehinderung der Endquerschnitte auf die Kipplast experimentell untersucht werden.

Versuchsträger Nr. 1 (ohne Endscheiben)

Die Angriffspunkte der Last lagen in der Schwerpunkthöhe des Prüfkörpers. Der Abstand \bar{f} zwischen Lastangriff und Aufhängung betrug 25 mm. Die Last wurden stufenweise aufgebracht. Nachfolgend sind die einzelnen Laststufen aufgeführt:

Laststufe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
vorh. Last (kp)	4,96	12,87	20,78	23,94	27,11	28,69	30,27	31,84	32,34

Bei der 9. Laststufe befand sich der Versuchsträger noch im Gleichgewichtszustand. Dabei traten nur sehr geringfügige Verformungen auf, die auf das elastische Verhalten des Materials zurückgeführt werden konnten.

Bei einer geringfügigen Erhöhung der Belastung hielt sich der Versuchskörper nicht mehr in der geraden Gleichgewichtslage (vergl. Bild 46). Bei Entlastung erhielt der Träger seine ursprünglich gerade Lage wieder zurück.

Das bedeutet, dass die kritische Last (Verzweigungslast) der vorhandenen Belastung bei der 9. Laststufe nämlich $p_{k1} = 32,34 \text{ Kp}$ entsprach. Bei weiterer Erhöhung der Last nahmen die Verformungen - fast Verdrehung um Schubmittelpunkt - sehr rasch zu bis zur Erreichung der maximalen Traglast.

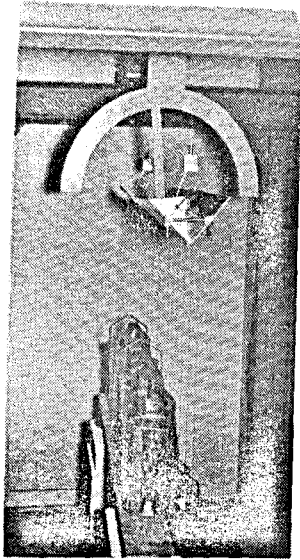


Bild 46

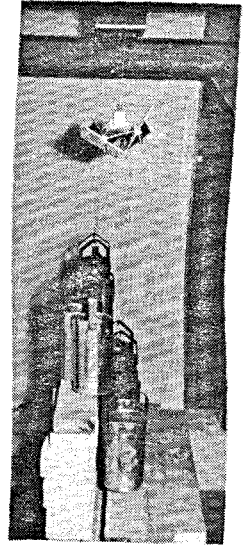


Bild 47

Die weiteren Laststufen betrugen:

Laststufe Nr.	10	11	12
vorh. Last (Kp)	33,76	34,72	35,94

Unter der 12. Laststufe ging der Versuchskörper zu Bruch (siehe Bild 47).

D.h., die maximale Traglast

$$p_l = 35,94 \text{ kp.}$$

Bei einer Belastung höher als die der Kippplast (oberhalb der 9. Laststufe) konnte der Versuchsträger verschiedene ausgebogene Gleichgewichtslagen je nach der Grösse der Störkraft annehmen. Der Träger behielt diese ausgebogene Lage auch nach Wegnahme der Störkraft bei, während er im stabilen Gleichgewichtszustand (unterhalb der kritischen Last) zur einzig möglichen Gleichgewichtslage (gerader Lage) zurückkehrte, sobald die Störkräfte entfernt wurden.

Im folgenden werden die Ergebnisse der verschiedenen Laststufen nicht mehr im einzelnen aufgeführt; es werden lediglich die Kipplast sowie die Traglast angegeben.

Versuchsträger Nr. 2 (ohne Endscheiben)

Dieser Versuch unterscheidet sich nur durch die Aufhängehöhe f .

Hierbei betrug $\bar{f} = 50$ mm

Kipplast $p_k^l = 34,96$ kp

Traglast $p_r^l = 39,80$ kp

Versuchsträger Nr. 3 (ohne Endscheiben)

$\bar{f} = 100$ mm

Kipplast $p_k^l = 36,26$ kp

Traglast $p_r^l = 41,16$ kp

Versuchsträger Nr. 4 (ohne Endscheiben)

$\bar{f} = 200$ mm

Kipplast $p_k^l = 37,00$ kp

Traglast $p_r^l = 42,44$ kp

Versuchsträger Nr. 5 (mit Endscheiben)

$\bar{f} = 25$ mm

Kipplast $p_k^l = 36,51$ kp (Bild 48)

Traglast $p_r^l = 39,24$ kp (Bild 49)

Versuchsträger Nr. 6 (mit Endscheiben)

$\bar{f} = 50$ mm

Kipplast $p_k^l = 40,26$ kp

Traglast $p_r^l = 42,59$ kp



Bild 48

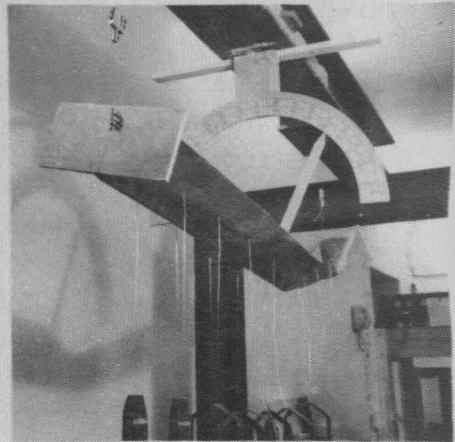


Bild 49

8.5 Auswertung der Versuche

8.51 Querschnittswerte des Versuchsträgers

$$l = 95,40 \text{ cm}$$

$$y_M = +4,0 \text{ cm}$$

$$r_x = -8,0 \text{ cm}$$

$$d = +4,0 \text{ cm}$$

$$e = 0,0 \text{ cm}$$

$$J_z = 0,0254 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 72,3968 \text{ cm}^4$$

$$J_x = 18,0992 \text{ cm}^4$$

$$C_M = 0,2714 \text{ cm}^6$$

Mit den experimentell ermittelten E- und G-Moduls erhält man

$$GJ_z = 6872 \text{ kp cm}^2$$

$$EJ_y = 49229824 \text{ kp cm}^2$$

$$EC_M = 184556 \text{ kp cm}^4$$

Mit $\sigma_{0,2} = 200 \text{ kp/cm}^2$ erhält man als max. Last im elastischen Bereich $p_1 = 75,88 \text{ kp}$.

8.52 Theoretische Kipplast

a) Für die Versuchsträger ohne Endscheiben.

Die Kipplast ist aus Gl. (55) zu bestimmen.

Die Rechenergebnisse für $\bar{f} = 2,5; 5; 10$ und 20 cm sind in Tafel XVI wiedergegeben. Ebenfalls sind die aus den Versuchen ermittelten Kipplasten sowie die Traglasten eingetragen.

T a f e l X V I

\bar{f} (cm)	rechn. Kipplast n. Gl.(55) (kp)	aus Versuch ermittelte Kipplast (kp)	aus Versuch ermittelte Traglast (kp)	Abweichung zwischen rechn. u. experimen- teller Kipplast (%)
2,5	33,67	32,34	35,94	4,11
5,0	36,34	34,96	39,80	3,95
10,0	37,88	36,26	41,16	4,46
20,0	38,67	37,00	42,44	4,51

b) Für die Versuchsträger mit Endscheiben

Die Kipplast ist aus Gl. (126) mit $\bar{P}_K = 0$ zu bestimmen.

Die Rechenergebnisse für $\bar{f} = 2,5$ und $5,0 \text{ cm}$ sowie die aus den Versuchen ermittelten Kipp- und Traglasten sind in Tafel XVII dargestellt.

T a f e l XVII

f (cm)	rechn. Kipplast n. Gl.(126) (kp)	aus Versuch ermittelte Kipplast (kp)	aus Versuch ermittelte Traglast (kp)	Abweichung zwischen rechn. u. experimen- teller Kipplast (%)
2,5	38,98	36,51	39,24	6,76
5,0	42,34	40,26	42,59	5,17

8.6 Deutung der Versuche

Vergleicht man die experimentellen Ergebnisse mit den theoretischen (Bild 50), so stellt man fest, dass die Übereinstimmung hinreichend gut ist. Bei den Versuchsträgern ohne Endscheiben bleibt die grösste Abweichung unter 5 %, während der Unterschied bei den Versuchsträgern mit Endscheiben etwas grösser ist (6,76 %). Es ist ebenfalls festzustellen, dass alle Versuchsergebnisse kleiner sind als die theoretischen. Der Grund dafür liegt z.T. in den kleinen ungewollten Anfangsverformungen infolge der Ungenauigkeit in der Herstellung der Modelle sowie in den Lasteintragungsvorrichtungen und teilweise in der bekannten Tatsache, dass die Energiemethode etwas höhere Kipplasten ergibt als die wirklichen. Da das Kippen im elastischen Bereich erfolgte, lagen die Werte Auskippen und Traglast (Erschöpfungslast) etwas auseinander, d.h. nach erfolgter Auskippen trug der Versuchsbalken noch eine zusätzliche Last (hier bis etwa 15 % der Kipplast), bevor er unter der Last wegging (überkritischer Bereich).

wie es aus einigen Vorversuchen festgestellt wurde, ist der überkritische Bereich bei Stahl grösser als bei Aluminium.

Bei Stabilitätsproblemen mit Verzweigungslast ist es möglich, dass der obere Grenzwert des Tragvermögens höher liegt als die Verzweigungslast. Dies ist nur der Fall bei sehr grossen Schlankheitsgraden im elastischen Bereich [vergl. 2] .

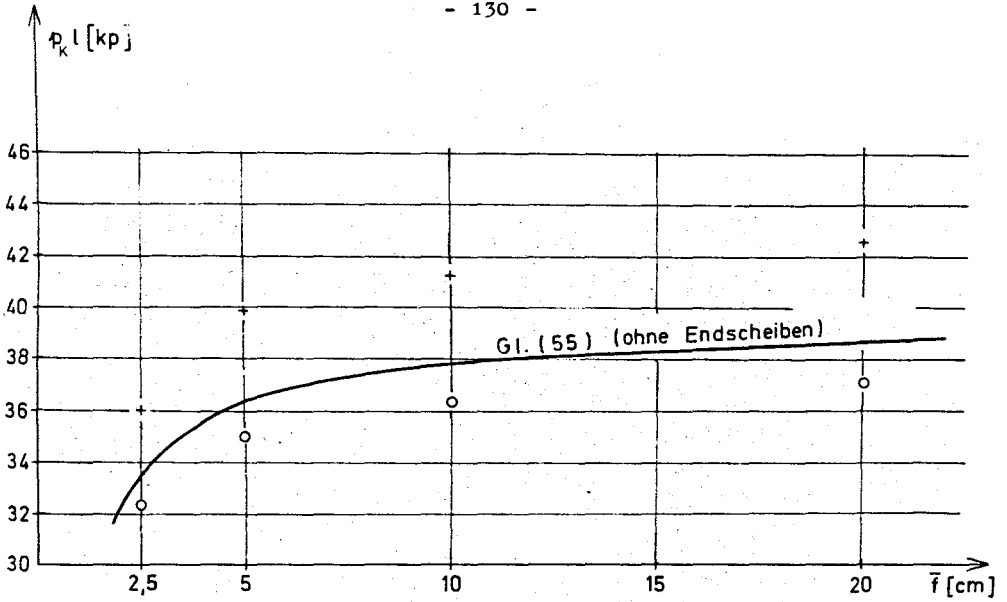


Bild 50a. Versuchsergebnisse der Gruppe 1

○ Auskippen

+ maximale Traglast

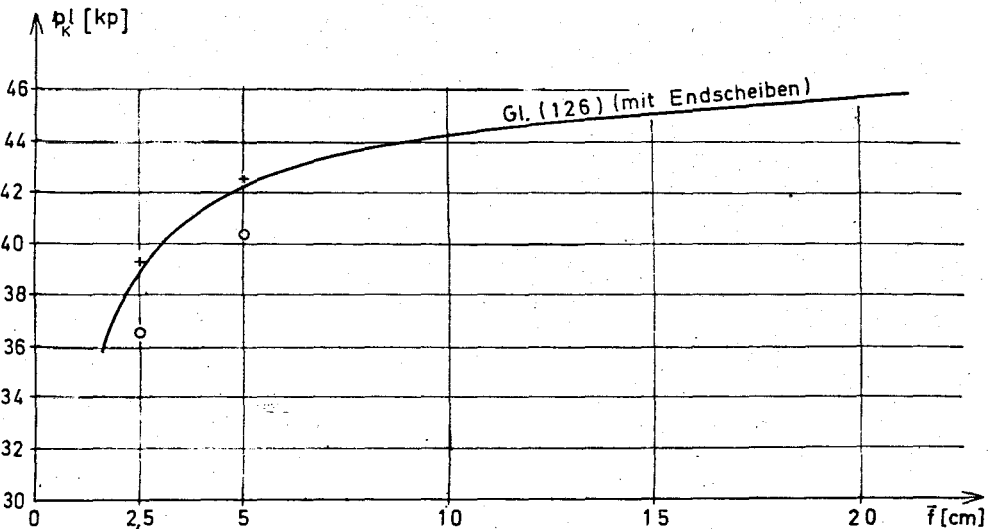


Bild 50. b. Versuchsergebnisse der Gruppe 2

9. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die elastische Kippstabilität der an ihren Enden aufgehängten, geraden Träger mit beliebig geformten, einfach-symmetrischem, dünnwandigem, offenem Querschnitt. Als Belastung wurde gleichmässig verteilte Querlast angenommen. Die ungünstige Auswirkung einer Längskraft auf die Kippsicherheit, herrührend von der Aufhängung, wurde untersucht.

Die theoretischen Lösungen dieses Stabilitätsproblems wurden mittels der Energiemethode abgeleitet. Die Genauigkeit dieser Lösungen ist von der Zahl und Eignung der zur Auswahl zugelassenen Funktionen abhängig.

Es wurde festgestellt, dass die verschiedenen Querschnittsformen hinsichtlich ihrer Stabilität in zwei Hauptgruppen unterteilt werden können. Während ein eingliedriger Ansatz genügend genaues Ergebnis zur Beurteilung der Kippsicherheit der Balkenträger mit I-Profilen liefert, muss für flächenartige Träger ($EI_y \gg GI_t$) ein mehrgliedriger Ansatz herangezogen werden, um genügende Genauigkeit zu gewährleisten. Durch die Annahme $EI_y = \infty$ lässt sich bei manchen Randbedingungen ($\beta = \beta_0 = 1$; $\beta = \beta_0 = 0,5$) die Berechnung der Kipplast der flächenartigen Träger erheblich vereinfachen. Es hat sich gezeigt, dass diese Annahme im Hinblick auf die Baupraxis gerechtfertigt ist.

Im Fall zusammengesetzter Beanspruchungen (Querlast + Längskraft) kann mit Hilfe der DUNKULY'schen Formel der Rechenaufwand wesentlich verringert werden, ohne die Kippsicherheit zu unterschätzen.

Der Einfluss der Aufhängehöhe f auf die Grösse der Kipplast wurde weitgehend untersucht. Der Abminderungsfaktor $\alpha = \frac{(R^I)_{\text{Aufh.}}}{(R^I)_{\text{geb.}}}$ ist im starken Mass von der Grösse EI_y/GI_t abhängig. Die Wirkung der Aufhängung auf die Kippsicherheit klingt um so rascher ab, je grösser die Biegesteifigkeit EI_y im Verhältnis zur Torsionssteifigkeit GI_t ist. Während dieser Einfluss beim Rechteckquerschnitt am deutlichsten ist, wird er beim V-formigen Querschnitt ($EI_y \gg GI_t$) nur für sehr kleine Aufhängehöhen

bemerkbar. Die bisherigen Verfahren [12] und [14] zur Bestimmung der Kipplast aufgehängter Balken mit I-Querschnitten mit Hilfe der α -Werte des Rechteckquerschnittes liefern zu niedrige Kipplasten als die tatsächlichen.

Der Einfluss der starren Endscheiben an den Stirnflächen eines Trägers auf die Kipplast wurde ebenfalls untersucht. Ferner wurde festgestellt, dass die durch die Endscheiben bedingte Zunahme der Kipplast vor allem von der Querschnittsform abhängt. Die Kippsicherheit flächenartiger Träger mit V-förmigem Querschnitt wird kaum von den Endscheiben beeinflusst. Im allgemeinen kann gesagt werden, dass flächenartige Träger im geringeren Mass kippsgefährdet sind als Balkenträger mit üblichen Profilen (I-Querschnitt).

Im Abschn. 6 wurden die für den praktischen Gebrauch geeigneten Formeln zusammengestellt.

Anschliessend wurde die Übertragung der gewonnenen, theoretischen Ergebnisse auf baupraktische Konstruktionen aus Stahl oder Stahlbeton gezeigt.

Die Kippsicherheit für einen Stahlträger im plastischen Bereich kann derart erfolgen, dass für den E-Modul ein von der Spannung abhängiger reduzierter Modul \bar{E} eingeführt wird. Es wurde auch angenommen, dass der Schubmodul im plastischen Bereich dieselbe Abhängigkeit von der Spannung hat wie der Modul \bar{E} . Die E- und G-Moduli sind überall im selben Verhältnis abzumindern, und zwar entsprechend der maximalen Spannung an der meist beanspruchten Stelle.

Die Beurteilung der Kippsicherheit von Stahlbetonbalken ist wegen der Rissbildung und beschränkten Elastizität des Betons vielfach schwieriger als bei Stahlträgern. Hierfür müssen die Arbeitslinien des Betons und der Bewehrung, die gerissene Zugzone des Betons und die zutreffenden Werte für die Biege- und Torsionssteifigkeit der Betonteile im gerissenen Zustand berücksichtigt werden.

Zahlenrechnungen zeigten, dass die Kipplast von Stahlbetonbalken mit üblichen Profilen aus der einfachen Formel $q = 120 \frac{f}{l^4} EJ_y$

mit genügender Genauigkeit berechnet werden kann, soweit es sich um kleine Aufhängehöhen handelt (bis $f/l \approx 0,05$).

Zur experimentellen Überprüfung der abgeleiteten Lösungen wurden 6 Modellversuche mit aufgehängten Trägern durchgeführt. Als Versuchsmaterial wurde Aluminium gewählt. Einige Versuchsträger erhielten Endscheiben. Die Versuchsergebnisse zeigten eine gute Übereinstimmung der Theorie. Der grösste Unterschied betrug ca. 7 %. Ferner ist zu bemerken, dass alle Versuchsergebnisse kleiner sind als die theoretischen.

An Hand von 8 Zahlenbeispielen sollte die Handhabung der abgeleiteten Kippformeln erleichtert werden.

Mit den gewonnenen Ergebnissen wäre es möglich, den Nachweis der Kippsicherheit schlanker, im Montagezustand befindlicher Fertigteile zu erbringen und sie so zu bemessen, dass sie den Anforderungen an Sicherheit und Wirtschaftlichkeit entsprechen.

10. Schrifttumverzeichnis

- [1] G. BÜRGERMEISTER : Stabilitätstheorie mit Erläuterung
zu DIN 4114. Tl. I
H. STEUP Akademie-Verlag, Berlin 1957
- [2] C. KOLLBRUNNER : Knicken, Biegedrillknicken, Kippen.
M. MEISTER 2. Aufl.
Springer-Verlag, Berlin 1961
- [3] A. PFLÜGER : Stabilitätsproblem der Elastostatik.
2. Aufl.
Springer-Verlag, Berlin 1964
- [4] S. TIMOSHENKO : Theory of Elastic Stability.
J. GERE 2nd Ed.
Mc Graw-Hill Book Co., New York 1961
- [5] E. CHAWALLA : Kippung von Trägern mit einfach-
symmetrischen, dünnwandigen und
offenen Querschnitten.
Sitzungsberichte der Akademie der
Wissenschaften in Wien II a
Bd. 153, Wien 1944
- [6] E. CHEALLA : Über die Kippstabilität querbe-
lasteter Druckstäbe mit einfach-
symmetrischem Querschnitt.
Beiträge zur angewandten Mechanik
(Federhofer-Girkmann-Festschrift)
Wien 1950
- [7] F. MEISSNER : Einige Auswertungsergebnisse der
Kipptheorie einfach-symmetrischer
Balkenträger.
Stahlbau 24 (1955), S. 110
- [8] H. WITTE : Die Lösung von Kipp-Problemen mit
der Energiemethode.
Diss. Darmstadt 1959
- [9] P. CSONKA : Die Stabilität des an einem Punkt
aufgehängten geraden Balkens.
Acta Techn. Hung. Budapest
Bd. 8 (1954) S. 389
- [10] P. CSONKA : Die Stabilität der an ihren Enden
aufgehängten prismatischen Stäbe
von rechteckigem Querschnitt.
Acta Techn. Hung. Budapest
Bd. 8 (1954) S. 79
- [11] E. BOLCSKEI : Die Stabilität des an zwei Punkten
aufgehängten geraden Balkens
Acta Techn. Hung. Budapest
Bd. (1954) S. 243

- [12] P. LEBELLE : Stabilité élastique des poutres en béton précontraint à l'égard du déversement Latéral. Ann. Inst. Techn. Bât. Trav. Publ., Nr. 141 Paris, Sept. 1959
- [13] J. MULLER : Lateral Stability of Precast members during handling and placing. Journal of Prestressed Concrete Instit., 1962 No. 1, S. 20
- [14] O. PETTERSSON : Vippningsproblem vid hissning och montering av slanka balkar. Nordisk Betong. 1960 H.3, S. 231
- [15] H. KLANG : Einfluss der Elastizität der Aufhängevorrichtungen auf die Kippstabilität des an zwei Punkten aufgehängten Trägers. Beton- und Stahlbetonbau 60 (1965) H. 11, S. 271
- [16] L. KOLLÁR : Lateral Buckling of Thin-walled Curved Bars (Shell Arches). Acta Techn. Hung., Budapest 1964 H. 314
- [17] K. ROIK : Biegedrillknicken mittig gedruckter Stäbe mit offenem Profil im unelastischen Bereich. Stahlbau 25 (1956), H. 1, S. 10
- [18] E. SCHABER : Beitrag zur Stabilitätsberechnung ebener Stabwerke. Stahlbau-Verlag, Köln 1960
- [19] W. HANSELL : Lateral Stability of Reinforced Concrete Beams. Journal of. Amer. Conc. Institute, Sept. 1959, S. 193
G. WINTER and Disc. in May 1960, S. 960
- [20] A. SIEV : The Lateral Buckling of slender reinforced Concrete Beams. Mag. of Concrete Research, London 1960, Nr. 36, S. 155
- [21] SANT : Experimental study of Lateral Stability of Reinforced Concrete Beams. Journal of. Amer. Conc. Inst. Des. 1961, Part 1, S. 713
BLETZACKER

- [22] PODOLNY : Lateral Stability of prestressed
SCALZI Concrete Girder.
Journal of Amer. Conc. Inst.
Sept. 1961, S. 213
- [23] C. HASCH : Spannungs-Dehnungs-Linien des Betons
und Spannungsverteilung in der Biege-
druckzone bei konstanter Dehnge-
schwindigkeit.
Heft 154 des D.A.f. St., Berlin 1962
- [24] H. RÜSCH : Versuche zur Festigkeit der Biege-
druckzone.
H. 120 des D.A.f. St.,
Berlin 1955
- [25] W. DILGER : Veränderlichkeit der Biege- und
Schubfestigkeit bei Stahlbeton-
tragwerken und ihr Einfluss auf
Schnittkraftverteilung und Trag-
last bei statisch unbestimmter
Lagerung.
H. 179 des D.A.f. St.,
Berlin 1966
- [26] M. ROŠ : Die materialtechnischen Grundlagen
und Probleme des Eisenbetons im
Hinblick auf die zukünftige Ge-
staltung der Stahlbeton-Bauweise.
EMPA-Bericht Nr. 162,
Zürich 1950
- [27] K. KORDINA : Stabilitätsuntersuchungen an Beton-
und Stahlbetonsäulen.
Diss. München 1956
- [28] A. LIEBENBERG : Stress-Strain funktion for Concrete
subjected to shortterm Loading.
Mag. of Concrete Research, London
1962 No. 41 S. 85
- [29] R. SELL : Einfluss dauernd wirkender Lasten auf
die Spannungsverteilung.
Arbeitstagung Deutscher Beton-Verein,
Wiesbaden 1959
- [30] R. SELI : Investigations into the Strength
of Concrete under sustained Load.
Bulletin Rilem No. 5 1959
- [31] A. HABEL : Knicken senkrecht zur Kraftebene.
Beton- und Stahlbetonbau 53 (1958)
H. 8, S. 197
- [32] S. TIMOSHENKO : Theory of Elasticity.
J. GODIER Mc Graw-Hill Book Co.,
New York 1951

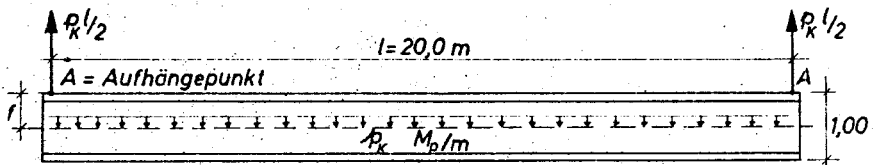
- [33] I. SZABO : Höhere technische Mechanik.
3. Auflage.
Springer-Verlag, Berlin 1960
- [34] C. WANG : Applied Elasticity.
Mc Graw-Hill Book Co., New York 1953
- [35] R. ROARK : Formulas for Stress and Strain.
4th Ed.
Mc Graw-Hill Book Co., New York 1965
- [36] H. COWAN : An elastic theory für the torsional
strength of rectangular reinforced
Concrete beams.
Mag. of Concrete Research,
London 1950, No. 4, S. 3
- [37] R. WALTHER : Über die Berechnung der Schubtrag-
fähigkeit von Stahl- und Spannbeton-
balken.
Beton- und Stahlbetonbau 57 (1962)
H. 11, S. 261
- [38] P. MORICE : On centres of twist in nonhomoge-
neous beams.
Mag. of Concrete Research,
London 1952, No. S. 63
- [39] W. SOWA : Beitrag zur rechnerischen und ex-
perimentellen Bestimmung des Schub-
mittelpunktes von dickwandigen, ein-
fach-symmetrischen und einfach-zusammen-
hängenden Querschnitten.
Diss. Darmstadt 1965
- [40] E. CHWALLA : Die Kippstabilität gerader Träger
mit doppelt-symmetrischem Quer-
schnitt.
Forschungsheft aus d. Geb. d. Stahl-
baues H. 2, Berlin 1939
- [41] DREHER : Ein Beitrag zur Berechnung des auf
Biegung und Torsion beanspruchten
Balkens mit I-Querschnitt.
Diss. Stuttgart 1963

A n h a n g

Anwendungsbeispiele

Beispiel 1

Für den in Bild 51 dargestellten Fertigteilbinder aus Spannbeton (B 450) soll im Montagezustand ($f = 0,50$ m) die Kipplast bestimmt werden. Die Belastung erfolgt lediglich durch sein Eigengewicht ($e = 0$).



Querschnittswerte nach [2]:

$$r_x = 0$$

$$y_M = 0$$

$$J_y = 73330 \text{ cm}^4$$

$$J_t = 67580 \text{ cm}^4$$

$$C_M = 121922000 \text{ cm}^6$$

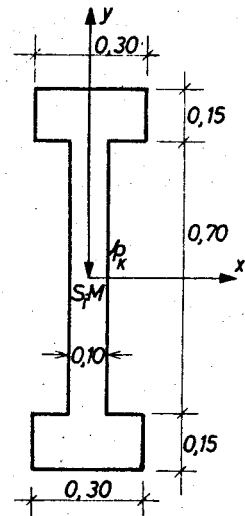
Steifigkeitswerte:

$$EJ_y = 350 \cdot 10^4 \cdot 73330 \cdot 10^{-8} = 2566,65 \text{ Mpm}^2$$

$$EC_M = 350 \cdot 10^4 \cdot 121922 \cdot 10^{-9} = 426,43 \text{ Mpm}^4$$

$$GJ_t = 150 \cdot 10^4 \cdot 67580 \cdot 10^{-8} = 1013,74 \text{ Mpm}^2$$

Bild 51



Die Kipplast ist nach Gl. (38) zu bestimmen. Nach Einsetzen der obigen Querschnitts- und Steifigkeitswerte erhält man unter Beachtung, dass $e = 0$ ist; $f = 0,50$ m

$$(p_k l)^2 + 712,5329 (p_k l) - 13736,1250 = 0.$$

Die positive Wurzel liefert die gesuchte Kipplast wie folgt:

$$p_k l = 18,80 \text{ Mp}$$

;

$$p_k = 0,94 \text{ Mp/m}.$$

Falls eine Gabellagerung vorliegt, ergibt sich die Kipplast zu

$$p_{k1} = 117,20 \text{ Mp} \quad ; \quad p_k = 5,86 \text{ Mp/m}$$

Der Abminderungsbeiwert

$$\alpha = \frac{0,94}{5,86} = 0,16$$

Ein genaueres Ergebnis wird erhalten, wenn die Kipplast nach (34) berechnet wird. Zur Verringerung des Rechenaufwandes wird der Fall der Gabellagerung betrachtet. In diesem Falle ist es einfacher, die Berechnung nach (Gl. 18) in [7] durchzuführen.

Die erwähnte Kippgleichung lautet:

$$p_k^4 - 578,22 p_k^2 - 17970,40 = 0.$$

Die kleinste positive Wurzel liefert die gesuchte Kipplast wie folgt:

$$p_k = 5,74 \text{ Mp/m}.$$

Der Abbruchfehler beträgt:

$$\frac{5,86 - 5,74}{5,74} \cdot 100 = 2,09 \%,$$

was für die Praxis belanglos ist.

Beispiel 2

Für den in Bild 52 dargestellten Plattenbalken aus Spannbeton (B450) mit 15 m Stützweite, soll die Kipplast ebenfalls im Montagezustand bestimmt werden. Die Belastung erfolgt lediglich durch sein Eigengewicht ($e = 0$). 2 Aufhängungsarten sollen hier untersucht werden (Bild 53).

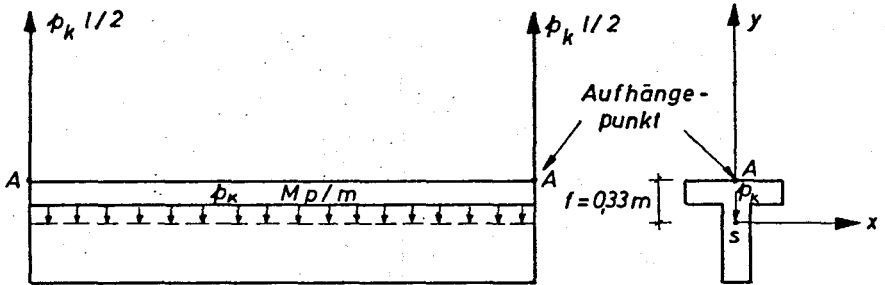


Bild 53 a

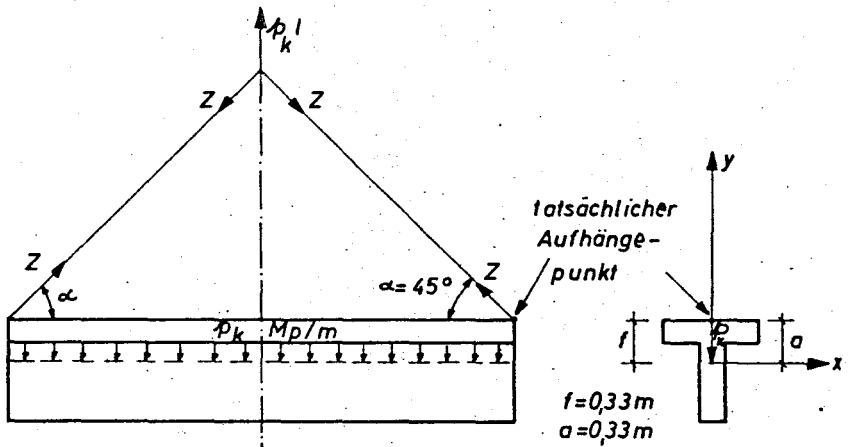


Bild 53 b

Bei 1. Aufhängemethode (Bild 53 a)

Mit $f = 0,33$ m erhält man nach Gl. (38) für die Kipplast

$$p_k l = 16,20 \text{ Mp} \quad ; \quad p_k = 1,08 \text{ Mp/m.}$$

Falls eine Gabellagerung vorliegt, ergibt sich die Kipplast

$$\text{zu } p_k l = 134,16 \text{ Mp} \quad ; \quad p_k = 8,94 \text{ Mp/m.}$$

$$\text{Der Abminderungsfaktor } \alpha = \frac{1,08}{8,94} = 0,121$$

Bei Gabellagerung erhält man noch genaueren Wert für p_k , wenn nach Gl. (18) in [7] berechnet wird. Die Kipplast errechnet sich aus

$$p_k^4 - 17,7566 p_k^3 - 1065,77 p_k^2 + 2539,00 p_k + 66582,10 = 0.$$

Die kleinste positive Wurzel dieser Gleichung liefert

$$p_k = 8,82 \text{ Mp/m. Der Abbruchfehler beträgt } \frac{8,94 - 8,82}{8,82} \cdot 100 = 1,36\%.$$

Bei 2. Aufhängemethode (Bild 53 b)

$$\text{Mit } a = 0,33 \text{ m, } f = 0,33 \text{ m und } P_k = \frac{p_k l}{2 \tan \alpha} = \frac{p_k l}{2}$$

erhält man nach Gl. (84)

$$19116,31 (p_k l)^2 + 15182294 p_k l - 222436803 = 0.$$

Daraus ergibt sich die Kipplast

$$p_k l = 14,40 \text{ Mp} ; \quad p_k = 0,96 \text{ Mp/m.}$$

$$\text{Die zugehörige Druckkraft beträgt } p_k = \frac{14,40}{2} = 7,20 \text{ Mp,}$$

$$\text{und das Randmoment } M_k = 0,33 \cdot 7,20 = 2,38 \text{ Mpm.}$$

Nun soll die DUNKULY'sche Formel an Hand dieses Beispiels überprüft werden.

Für das Gesamtproblem wurden folgende kritische Werte gefunden:

$$p_k^* l = 14,40 \text{ Mp} ; \quad P_k^* = 7,20 \text{ Mp} ; \quad M_k^* = 2,38 \text{ Mpm}$$

Bei Alleinwirkung der Gleichlast ($P_k = 0$; $M_k = 0$)

$$p_k l = 16,20 \text{ Mp}$$

Bei Alleinwirkung einer zentrischen Druckkraft ($p_k l = 0$; $a \neq 0$)

$$P_k = 50,15 \text{ Mp}$$

Bei Alleinwirkung eines konstanten Momentes ($p_k l = 0$; $P_k = 0$)

$$M_k = 221,30 \text{ Mpm}$$

Nach Gl. (87) :

Querschnittswerte nach [16] :

$$\begin{aligned} \chi_M &= +0,707 \text{ m} \\ r_x &= -1,414 \text{ m} \\ J_y &= 0,266700 \text{ m}^4 \\ J_t &= 0,001333 \text{ m}^4 \\ C_M &= 0,000444 \text{ m}^6 \end{aligned}$$

Steifigkeitswerte:

$$\begin{aligned} EJ_y &= 350 \cdot 10^4 \cdot 0,266700 = 933,450 \cdot 10^3 \text{ Mpm}^2 \\ GJ_t &= 150 \cdot 10^4 \cdot 0,001333 = 2,000 \cdot 10^3 \text{ Mpm}^2 \\ EC_M &= 350 \cdot 10^4 \cdot 0,000444 = 1,555 \cdot 10^3 \text{ Mpm}^2 \end{aligned}$$

Die Kipplast wird zunächst unter der vereinfachenden Annahme $EI_y = \infty$ berechnet.

$$\begin{aligned} \text{a) nach Gl. (59)} \quad \bar{p}_k^1 &= 269,68 \text{ Mp,} \\ \bar{p}_k &= 8,989 \text{ Mp/m.} \end{aligned}$$

Bei Gabellagerung ($\bar{f} = \infty$):

$$\begin{aligned} \bar{p}_k^1 &= 285,25 \text{ Mp,} \\ \bar{p}_k &= 9,508 \text{ Mp/m.} \end{aligned}$$

b) nach Gl. (55)

$$(\bar{p}_k^1)^2 - 661,16 (\bar{p}_k^1) + 94639,66 = 0.$$

Die positive Wurzel liefert

$$\begin{aligned} \bar{p}_k^1 &= 209,55 \text{ Mp,} \\ \bar{p}_k &= 6,985 \text{ Mp/m.} \end{aligned}$$

Bei Gabellagerung ($\bar{f} = \infty$):

$$\begin{aligned} \bar{p}_k^1 &= 213,39 \text{ Mp,} \\ \bar{p}_k &= 7,113 \text{ Mp/m} \end{aligned}$$

c) Nach Kippbdg. (50)

$$\begin{aligned} -275,3565 (\bar{p}_k^1)^3 + 316292,35 (\bar{p}_k^1)^2 - 104,7221 \cdot 10^6 (\bar{p}_k^1) \\ + 10545,75 \cdot 10^6 = 0. \end{aligned}$$

Die kleinste positive wurzel liefert

$$\bar{p}_k^1 = 204,70 \text{ Mp,} \quad \bar{p}_k = 6,823 \text{ Mp/m.}$$

Bei Gabellagerung ($\bar{f} = \infty$)

$$\bar{p}_k^1 = 208,38 \text{ Mp,} \quad \bar{p}_k = 6,946 \text{ Mp/m.}$$

Nun ist die Kipplast mit dem tatsächlichen Wert EI_y zu bestimmen. Im weiteren wird die Gabellagerung zugrunde gelegt, weil es sich hier um Genauigkeitsbetrachtungen handelt.

$$(p_k l)^2 + 6810,884 (p_k l) - 1943222 = 0$$

Die positive Wurzel ergibt $p_k l = 274,28 \text{ Mp}$; $p_k = 9,143 \text{ Mp/m}$.

e) nach Kippbdg (34) oder nach Gl. (18) in [7], sofern eine Gabellagerung vorliegt:

$$+ 0,000089072 k^4 - 0,1833496 k^3 + 20,225439 k^2 + 309,273434 k + 951,974847 = 0.$$

Die kleinste negative Wurzel liefert $k = -4,3865$.

Hierbei bedeutet $k = \frac{-p_k l^3}{\sqrt{EI_y GJ_t}}$

Daraus $p_k l = 210,59 \text{ Mp}$,

$p_k = 7,019 \text{ Mp/m}$.

Die gewonnenen Ergebnisse sind in Tafeln XIII und XIX zusammengestellt.

T a f e l XIII

aufgehängter Träger ($\bar{f}/l = 0,10$)

	1. Näherung n. Gl. (59)	2. Näherung n. Gl. (55)	3. Näherung n. Gl. (50)
Kipplast $p_k (\text{Mp/m})$	8,989	6,985	6,823
Abbruch- fehler in % in bezug auf 3. Näherung	31,74	2,37	0

T a f e l X I X

Gabelgelagerter Träger ($\bar{f}/l = \infty$)

		1. Näherung	2. Näherung	3. Näherung
$EI_y \neq \infty$	p_k (Mp/m)	9,143	7,019	-
	Abbruchfehler in %	31,62	1,05	-
$EI_y = \infty$	p_k (Mp/m)	9,508	1,113	6,946
	Abbruchfehler in %	36,88	2,40	o

Nun soll die Auswirkung der Annahme $EI_y = \infty$ auf die Grösse der Kipplast untersucht werden.

In Tafel XIX beträgt der Unterschied bei der 1. Näherung

$$\frac{9,508 - 9,143}{9,143} \cdot 100 = 4,0 \% .$$

Nach Abschn. 3.14 ist die Vergleichsgrösse $(\frac{1}{h})^2 (\frac{t}{h})^2$ zu ermitteln

Sie beträgt in diesem Beispiel $\frac{30^2 \cdot 0,10^2}{1,414^4} = 2,25 < 2,5$

für $b/h = 1,0$ (Vgl. Tafel II).

D.h. : Der auftretende Fehler bleibt bei der 1. Näherung unter der als zulässig angenommenen Grenze (5 %).

Unter Zugrundelegung der 2. Näherung nimmt die Abweichung den Wert

$$\frac{7,113 - 7,019}{7,019} \cdot 100 = 1,34 \%$$

an, welcher kleiner als 4 % ist.

Beispiel 4

Für das umgekehrte Profil des im Beispiel 3 behandelten Faltwerkelements soll die Kipplast berechnet werden. Der Träger ist gabelgelagert anzunehmen.

In diesem Fall darf kein Gebrauch von der Annahme $EI_y = \infty$ gemacht werden, weil der Schubmittelpunkt über dem Schwerpunkt

des Querschnittes liegt.

a) nach Gl. (39) $(p_k l)^2 - 6810,884 (p_k l) - 1943222 = 0$.

Die positive Wurzel ergibt $p_k l = 7085,14 \text{ Mp}$,

$$p_k = 236,170 \text{ Mp/m.}$$

b) nach Kippbdg. (34) oder nach Gl. (18) in [7]

$$0,000089072 k^4 - 0,1833496 k^3 + 20,225439 k^2 + 309,273434 k + 951,974847 = 0,$$



Die kleinste positive Wurzel liefert.

$k = + 131,85$. Daraus $p_k l = 6329,93 \text{ Mp}$,

$$p_k = 210,998 \text{ Mp/m}$$

Der Abbruchfehler beträgt $= \frac{236,170 - 210,998}{210,998} \cdot 100 = 11,93 \%$








T a f e l XX

Querschnittsform	1. Näherung	2. Näherung	Abbruchfehler in %
	$p_k = 9,143$	$P_k = 7,019$	30,26 %
	$p_k = 236,170$	$P_k = 210,998$	11,93 %

Daraus stellt man fest, dass die Kippsicherheit des behandelten Trägers mit \wedge -förmigem Querschnitt ca. 30 mal so gross ist, wie die Sicherheit beim \vee -Querschnitt.

Anschaulichkeitshalber sind in Tafel XXI die Abweichungen zwischen den 1. und 2. Näherungen für die schon behandelten Querschnitte zusammengestellt.

T a f e l X X I

Querschnitts- form	Steifigkeitsver- hältnisse		Abweichung in %	Bemerkung
	EI_y/GI_t	$1^2 GI_t/EC_M$		
	0,625	∞	2,15	-
 (Beton)	2,080	3156,45	1,36	s. Beisp. 2
 (Beton)	2,530	950,91	2,09	s. Beisp. 1
 (Stahl)	86,62	50,57	1,35	nach [7]
 (Stahl)	86,62	50,57	2,80	nach [7]
 (Beton)	446,70	1157,56	30,26	s. Beisp. 3
 (Beton)	446,70	1157,56	11,93	s. Beisp. 4

Beispiel 5

Es soll die Kipplast eines Stahlträgers (Bild 55) mit 20 m Stützweite bei verschiedenen Randausbildungen bestimmt werden.

Querschnitt [7] :

$$\chi_M = 0,3099 \text{ m}$$

$$r_x = 0,1082 \text{ m}$$

$$J_y = 5062,5 \text{ cm}^4$$

$$J_t = 153,3 \text{ cm}^4$$

$$C_M = 0,5 \cdot 10^7 \text{ cm}^6$$

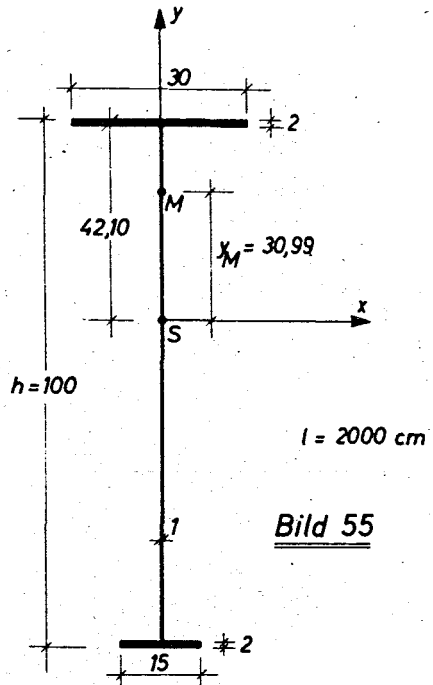


Bild 55

Steifigkeitswerte:

$$EJ_y = 5062,5 \cdot 10^{-8} \cdot 2100 \cdot 10^4 = 1063,125 \text{ Mpm}^2$$

$$GJ_t = 153,3 \cdot 10^{-8} \cdot 810 \cdot 10^4 = 12,417 \text{ Mpm}^2$$

$$EC_M = 0,5 \cdot 10^7 \cdot 10^{-12} \cdot 2100 \cdot 10^4 = 105,000 \text{ Mpm}^4$$

I. Gabellagerung: $\beta = 1$, $\beta_0 = 1$

nach Gl. (39)

$$(p_k l)^2 - 8,1790 p_k l - 83,3678 = 0.$$

Die Auflösung der Gleichung ergibt die Wurzeln

$$p_k l = + 14,099 \text{ mp} ; p_k = + 0,705 \text{ Mp/m}$$

und

$$p_{k1} = - 5,921 \text{ Mp} ; p_k = - 0,296 \text{ Mp/m} .$$

Der positive Wert gilt für den in Bild 55 dargestellten Querschnitt, während der negative für den umgekehrten Querschnitt gültig ist.

II. Gabellagerung mit Endscheiben $\beta = 1, \beta_0 = 0,5$

II a) nach Gl. (113)

$$(p_{k1})^2 - 8,6132 (p_{k1}) - 222,8991 = 0 .$$

Die Wurzeln sind

$$p_{k1} = + 19,848 \text{ Mp} ; p_k = + 0,992 \text{ Mp/m} ,$$

und

$$p_{k1} = - 11,234 \text{ Mp} ; p_k = - 0,562 \text{ Mp/m} .$$

II b) nach Gl. (109)

$$(p_{k1})^2 - 10,9290 (p_{k1}) - 172,1151 = 0 .$$

Die Wurzeln sind

$$p_{k1} = + 19,675 \text{ Mp} ; p_k = + 0,984 \text{ Mp/m} ,$$

und

$$p_{k1} = - 8,747 \text{ Mp} ; p_k = - 0,437 \text{ Mp/m} .$$

II c) nach Kippbdg. (100)

$$(p_{k1})^3 - 1563,08 (p_{k1})^2 + 17407,60 p_{k1} + 252077,06 = 0 .$$

Die reellen Wurzeln sind

$$p_{k1} = + 19,650 \text{ Mp} ; p_k = + 0,9825 \text{ Mp/m} ,$$

und

$$p_{k1} = - 8,285 \text{ Mp} ; p_k = - 0,4142 \text{ Mp/m} .$$

II d) nach Gl. (97)

$$(p_{k1})^2 - 11,5978 (p_{k1}) - 148,9860 = 0 .$$

Die Wurzeln sind:

$$p_{k1} = + 19,312 \text{ Mp} ; p_k = + 0,9656 \text{ Mp/m} ,$$

und

$$p_{k1} = - 7,714 \text{ Mp} ; p_k = - 0,3857 \text{ Mp/m} .$$

II e) nach Gl. (104)

$$(p_{k1})^2 - 11,60428 (p_{k1}) - 148,8297 = 0 .$$

Die Wurzeln sind :

$$p_{k1} = + 19,311 \text{ Mp} ; p_k = + 0,9655 \text{ Mp/m} ,$$

und

$$p_{k1} = - 7,707 \text{ Mp} ; p_k = - 0,3853 \text{ Mp/m} .$$

II f) nach Kippbdg. (93)

$$(p_k l)^4 - 300,6648 (p_k l)^3 - 100111,4639 (p_k l)^2 + 1201054,74 (p_k l) + 14990492,62 = 0.$$

Die reellen Wurzeln sind:

$$p_k l = + 18,9061 \text{ Mp} \quad ; \quad p_k = + 0,9453 \text{ Mp/m}$$

und

$$p_k l = - 7,6804 \text{ Mp} \quad ; \quad p_k = - 0,3840 \text{ Mp/m}$$

III. Einspannung $\beta = 0,5$, $\beta_o = 0,5$

nach Gl. (123)

$$(p_k l)^2 - 28,6026 (p_k l) - 366,7738 = 0.$$

Die Wurzeln sind:

$$p_k l = + 38,206 \text{ Mp} \quad ; \quad p_k = + 1,910 \text{ Mp/m}$$

und

$$p_k l = - 9,604 \text{ Mp} \quad ; \quad p_k = - 0,480 \text{ Mp/m}$$

T a f e l XXII

(Randbedingung $\beta = 1$, $\beta_o = 0,5$)

nach Gl.	T - Querschnitt		I-Querschnitt	
	$p_k l (\text{Mp})$	Abbruchfehler %	$p_k l (\text{Mp})$	Abbruchfehler %
(113)	19,848	4,98	11,324	46,27
(109)	19,675	4,07	8,747	15,89
(100)	19,640	3,88	8,285	7,88
(97)	19,312	2,15	7,714	0,44
(104)	19,311	2,14	7,707	0,35
(93)	18,906	0	7,680	0

T a f e l X X I I I

Randbedingung	<u>T - Querschnitt</u>		<u>I - Querschnitt</u>	
	p_k^1 (Mp)	Zuwachs in %	p_k^1 (Mp)	Zuwachs in %
$\beta = 1, \beta_0 = 1$	+ 14,099	0	5,921	0
$\beta = 1; \beta_0 = 0,5$	+ 18,906	31,3	7,680	29,7
$\beta = 0,5; \beta_0 = 0,5$	+ 38,206	171,0	9,604	62,0

Beispiel 6

Der im Beispiel 1 dargestellte Fertigteilbinder ist mit 2 Endscheiben versehen (Bild 56) ..

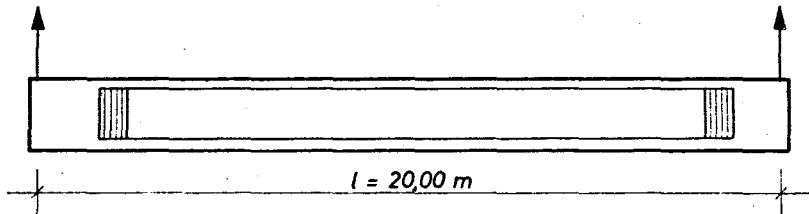


Bild 56

Es soll die Kipplast berechnet werden unter der Annahme, dass die Endquerschnittsverwölbung völlig behindert ist.

Nach Gl. (108) mit $f = 0,50 \text{ m}$:

$$(p_{k1})^2 + 949,48 (p_{k1}) - 18303,74 = 0 .$$

Daraus

$$p_{k1} = 18,90 \text{ Mp} \quad ; \quad p_k = 0,945 \text{ Mp/m} .$$

Liegt eine Gabellagerung vor, so ergibt Gl. (108)

$$p_{k1} = 135,28 \text{ Mp} \quad ; \quad p_k = 6,764 \text{ Mp/m} .$$

T a f e l XXIV

Randbedingung		Kipplast /Mp/
ohne Endscheiben	$f/l = 1/40$	18,80
	$f/l = \infty$	117,20
mit Endscheiben	$f/l = 1/40$	18,90
	$f/l = \infty$	135,28

Aus Tafel XXIV kann man die Schlussfolgerung ziehen, dass bei relativ dickwandigen Querschnitten, welche im Stahl- und Spannbetonbau üblich sind, die Kipplast von den Endscheiben unwesentlich beeinflusst werden kann.

Im Gegensatz dazu, ist dieser Einfluss bei dünnwandigen I-Querschnitten deutlicher zu bemerken (vergl. Beispiel 5).

Beispiel 7

Für das im Beisp. 3 behandelte Faltwerkelement soll die Kipp-
last unter der Voraussetzung ermittelt werden, dass die End-
querschnitte zwei starre Endscheiben erhalten.

I) Randbedingungen $\beta = 1,0$, $\beta_0 = 0,5$

I a) nach Gl. (108)

$$(p_k l)^2 + 10372,96 p_k l - 5557109 = 0$$

$$p_k l = \underline{510,62 \text{ Mp}} \quad ; \quad p_k = 17,021 \text{ Mp/m}$$

I b) nach Gl. (97)

$$(p_k l)^2 + 10439,86 (p_k l) - 2405451 = 0$$

$$p_k l = \underline{225,50 \text{ Mp}} \quad ; \quad p_k = 7,513 \text{ Mp/m}$$

I c) nach Gl. (104)

$$(p_k l)^2 + 10444,45 p_k l - 2351075 = 0$$

$$p_k l = \underline{220,45 \text{ Mp}} \quad ; \quad p_k = 7,348 \text{ Mp/m}$$

I d) nach Gl. (117)

$$(p_k l)^2 + 10444,45 (p_k l) - 2343156 = 0$$

$$p_k l = \underline{219,72 \text{ Mp}} \quad ; \quad p_k = 7,324 \text{ Mp/m}$$

T a f e l XXV

	1. Näherung	2. Näherung	3. Näherung	4. Näherung
Kipplast (Mp)	510,62	225,50	220,45	219,72
Abbruch- fehler in %	132,40	2,63	0,33	0

II) Randbedingung $\beta = 0,5$, $\beta_0 = 0,5$

IIa) nach Gl. (123)

$$(p_k l)^2 + 25684 p_k l - 5771340 = 0$$

$$p_k l = \underline{222,50 \text{ Mp}} \quad ; \quad p_k = 7,417 \text{ Mp/m}$$

Wird die seitliche Biegesteifigkeit angenähert unendlich angesetzt, so ergibt sich aus Gl. (129)

$$p_{k1} = \underline{224,34 \text{ Mp}} \quad ; \quad p = 7,476 \text{ Mp/m} .$$

Die Abweichung beträgt ca. 0,8 % .

II b) nach Gl. (126)

(unter der Annahme $EI_y = \infty$)

$$(p_{k1})^2 - 581,9702 (p_{k1}) + 80230,49 = 0 .$$

$$p_{k1} = \underline{224,32 \text{ Mp}} \quad ; \quad p_k = 7,476 \text{ Mp/m} .$$

T a f e l XXVI

	Randbedingungen		
	$\beta = 1; \beta_o = 1$	$\beta = 1; \beta_o = 0,5$	$\beta = 0,5, \beta_o = 0,5$
Kipplast (Mp)	210,59	219,72	222,50

Zum Schluss ist zu erwähnen, dass die Kipplast von den Endausbildungen bei Trägern mit V-Querschnitten unwesentlich beeinflusst wird. Hier beträgt der Unterschied zwischen Gabellagerung ($\beta = \beta_o = 1$) und seitlicher Einspannung ($\beta = \beta_o = 0,5$) ca. 6 %.

Beispiel 8

Für einen Stahlbeton-Dachbinder mit 15 m Stützweite soll die Kippsicherheit im Montagezustand nachgewiesen werden. Die Aufhängung des Binders erfolgt durch 2 Stahlschlaufen, die an den Binderenden liegen. Die Schlaufen sind kurz genug, so dass deren Elastizität nicht berücksichtigt zu werden braucht.

Baustoffe B 300
 B St. 42/50

Die Bemessung nach n-Verfahren für die Gebrauchslast $q = 1,4$ Mp/m ergibt die in Bild 57 dargestellten Querschnittsabmessungen.

Eigengewicht des Binders: $g' = 0,41$ Mp/m

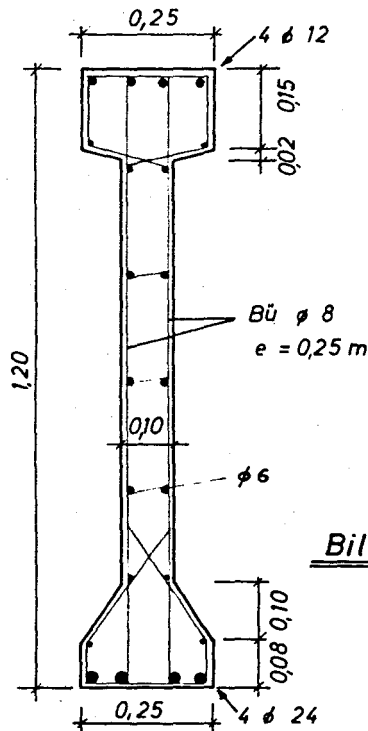


Bild 57

Querschnittsfestwerte für den ungerissenen Querschnitt (Stadium I)
Vergl. Bild 58.

$$\begin{aligned} \chi_M &= 5,7 && \text{cm} \\ r_x &= -2,65 && \text{cm} \\ J_y &= 44540 && \text{cm}^4 \\ J_x &= 2619000 && \text{cm}^4 \\ J_t &= 74000 && \text{cm}^4 \text{ (nach Gl. (165))} \\ C_M &= 0 && \text{(vernachlässigt)} \end{aligned}$$

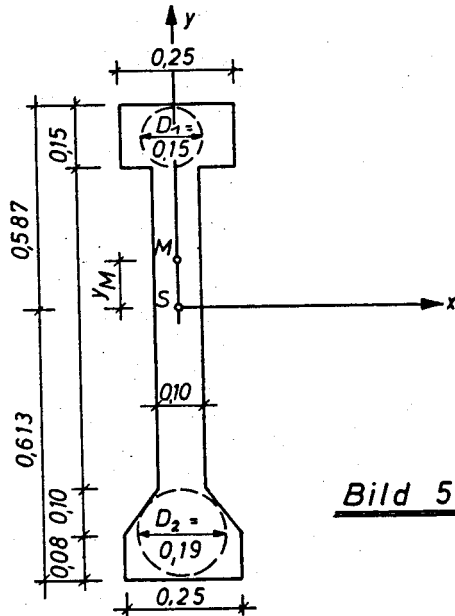


Bild 58

Aufstellung der $\varepsilon_b - M_m$ -Beziehung für den Querschnitt
m - m ($z = l/2$) :

Die Spannungsverteilung in der Betondruckzone soll durch das
 $\sigma_b - \varepsilon_b$ -Diagramm gegeben sein. Gemäss DIN 1045, Neufassung,
soll für die Verformungsberechnung die in Bild 18 wiedergegebene
 $\sigma_b - \varepsilon_b$ -Linie (B 300) angewandt werden. Abweichend davon wird
hier die $\sigma_b - \varepsilon_b$ -Linie durch die Funktion

$$\sigma_b = \beta_R \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{b8}} \right)^\lambda \right]$$

festgelegt, wobei

$$\begin{aligned}\varepsilon_{b8} &= 4,25 \text{ } ^\circ/\text{oo} \\ \lambda &= 5,00\end{aligned}$$

bedeuten..

Für die Steifigkeitsberechnungen ist

$$\beta_R = 0,85 \quad \beta_{w,m} = 255 \text{ Kp/cm}^2$$

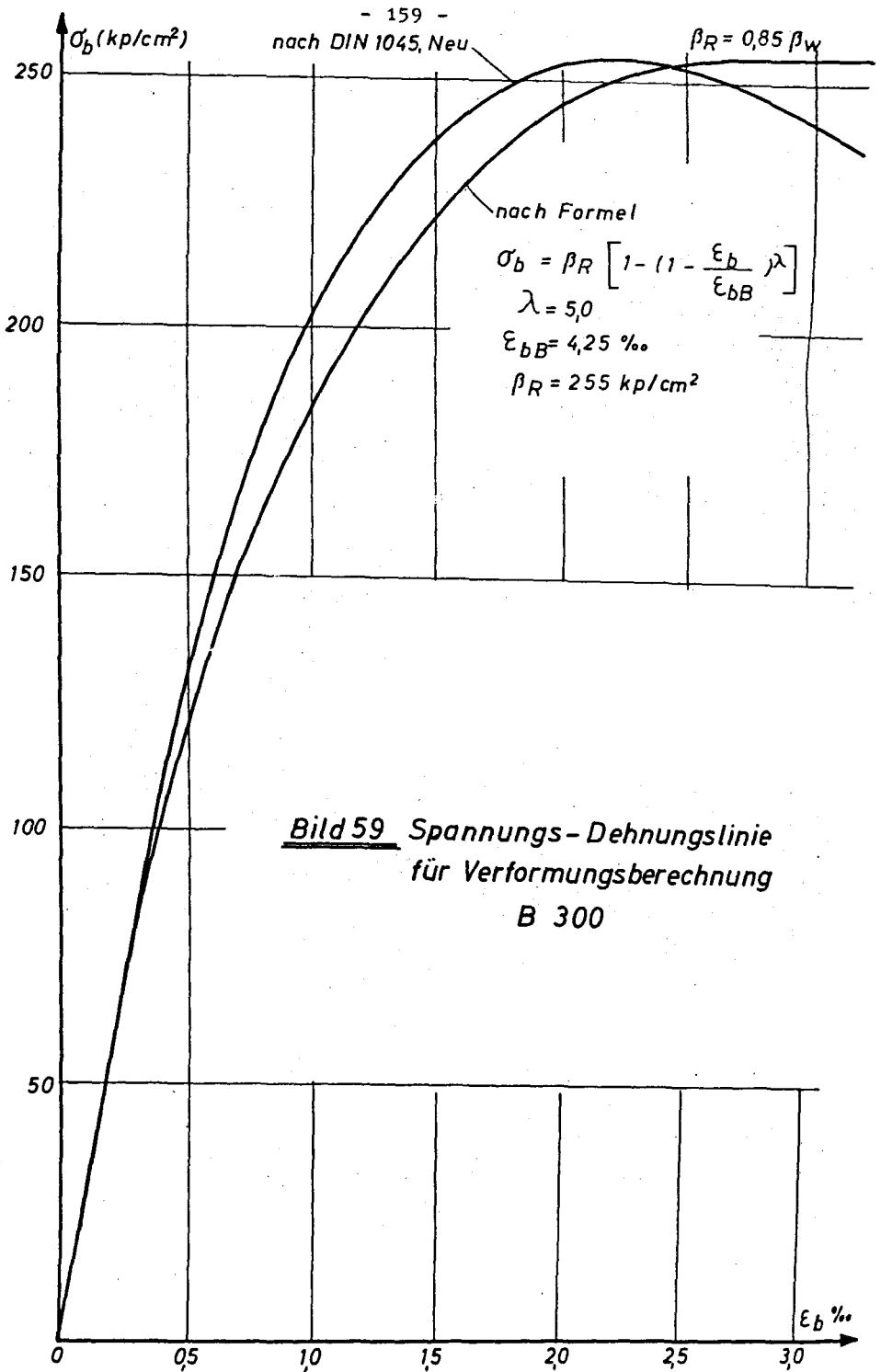
zu setzen.

Damit wird

$$\sigma_b = 255 \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_b [\%]}{4,25} \right)^5 \right]$$

Die nach dieser Funktion ermittelte $\sigma - \varepsilon$ -Linie ist in
Bild 59 mit der in DIN 1045, Neufassung, angegebenen Linie
verglichen.

Der Berechnung wird eine idealisierte $\sigma - \varepsilon$ -Linie für
B St. 42/50 zugrunde gelegt (Bild 60). Dabei beträgt
 $\beta_s = 4200 \text{ Kp/cm}^2$.



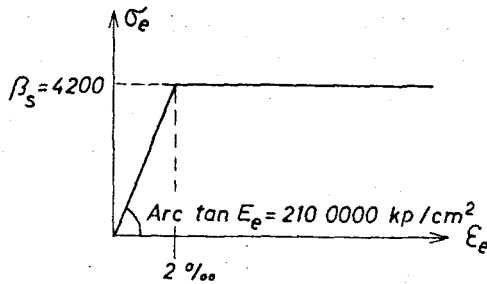


Bild 60 Idealisierte σ - ϵ - Linie für Betonstahl III b

Die benötigten Völligkeits- und die Schwerpunktsbeiwerte (α , β) können direkt aus [25] für B 300 entnommen werden.

Für verschiedene ϵ_b - Werte werden x , ϵ_e , M_m und die zugehörige Last q_l ermittelt.

T a f e l XXVII

ϵ_b (‰)	x (cm)	ϵ_e (‰)	M_m (Mp.m)	q_l (Mp)
0,25	36,0	0,55	22,02	11,80
0,50	35,8	1,10	44,64	23,80
0,75	35,6	1,67	66,62	35,60
1,00	33,9	2,36	79,46	42,30
1,50	24,10	5,70	81,28	43,40

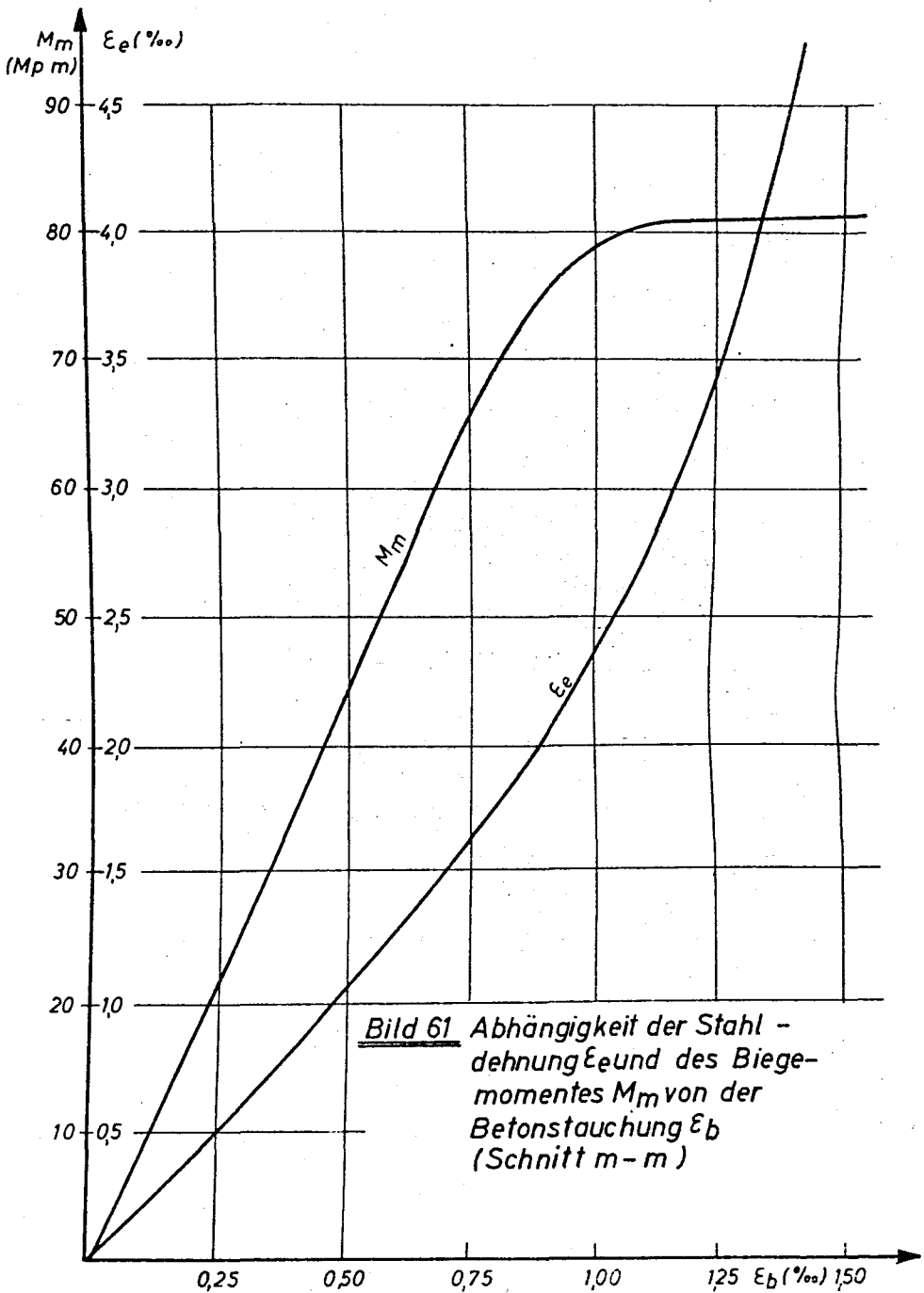


Bild 61 Abhängigkeit der Stahl -
dehnung ϵ_e und des Biege-
momentes M_m von der
Betonstauchung ϵ_b
(Schnitt m - m)

Die Abhängigkeiten der Stahldehnung ϵ_e sowie des Biegemomentes M_m von der maximalen Betonstauchung ϵ_b sind in Bild 61 aufgetragen.

Berechnung der Biegesteifigkeit EI_y des Querschnitts m-m

Stadium I (ungerissener Querschnitt)

$$E = E_o = \frac{\lambda}{\epsilon_{bB}} \beta_R$$

$$E = \frac{5}{4,25 \cdot 10^{-3}} \cdot 255 = 300\,000 \text{ Kp/cm}^2$$

$$(EI_y)_o = 44540 \cdot 300\,000 = 13362 \cdot 10^6 \text{ Kp cm}^2 = 1336 \text{ Mp.m}^2$$

Stadium II (gerissener Querschnitt)

Für verschiedene ϵ_b -Werte werden die Steifigkeitsgrößen mit Hilfe der Gln. (149) und (152) ermittelt. Die Ergebnisse sind in Tafel XXVIII wiedergegeben.

T a f e l XXVIII

ϵ_b (‰)	M_m (Mp.m)	q_l (Mp)	EJ_y (Mp.m ²)
-	-	-	1336
0,25	22,02	11,80	992
0,50	44,64	23,80	859
0,75	66,62	35,60	733
1,00	79,46	42,30	547
1,50	81,28	43,40	397

Die Abhängigkeit der seitlichen Biegesteifigkeit EI_y von der Belastung q_l ist in Bild 62 dargestellt.

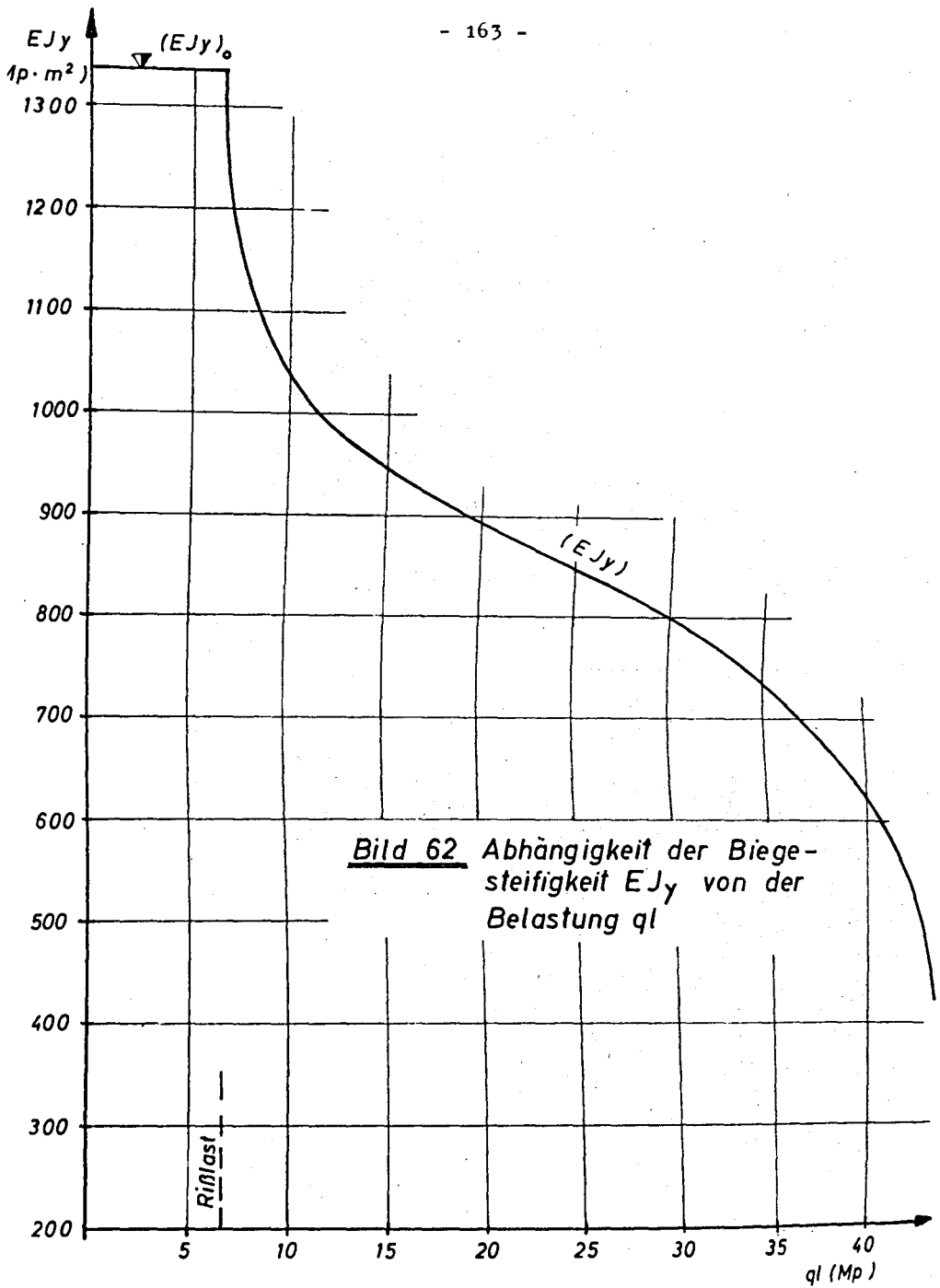


Bild 62 Abhängigkeit der Biegesteifigkeit EJ_y von der Belastung ql

Aufstellung der \mathcal{E}_b - M_s - Beziehung für den Querschnitt s-s

Die Lage des kritischen Schnittes s-s ist nach Gl. (169) zu ermitteln.

$$\text{Mit } Q_s = \frac{q}{2} (l - 2z_s) ,$$

$$M_s = \frac{q}{2} (lz_s - z_s^2) ,$$

$$l = 15 \text{ m} \quad \text{und} \quad h = 1,15 \text{ m}$$

erhält man aus Gl. (169) $z = 3,85 \text{ m}$.

Nach der Schubtheorie von WALTHER [37] werden x , \mathcal{E}_e , M_s und die zugehörige Last q für verschiedene \mathcal{E}_b -Werte ermittelt (Tafel XXIX).

Hierfür gelten - wegen Bezeichnungen vergl. [37] -

$$k_b = 0,99 ,$$

$$k_\tau = 1 \quad (\text{für alle Belastungsgrade}) .$$

Der günstige Einfluss der Schubbewehrung auf die Festigkeit der Schubdruckzone wird hier vernachlässigt. So ist der Schub-sicherungsgrad $\mathcal{Z} = 0$ zu setzen.

Damwird:

$$\begin{aligned} \psi = \frac{\beta_{Rz}}{\beta_R} &= \frac{1}{1 + 3,2 [(Q_s h / M_s)(1 - \mathcal{Z})]^2} && [37, \text{Gl. 7a}] \\ &= \frac{1}{1 + 3,2 (1/5,1)^2} = 0,89 \end{aligned}$$

$$\beta_{Rz} = 0,89 \cdot 255 = 227 \text{ Kp/cm}^2$$

Den nachfolgenden Berechnungen wird $\beta_{Rz} = 227 \text{ Kp/cm}^2$ zugrunde gelegt. Dies liegt auf der sicheren Seite.

T a f e l XXIX

ε_b (‰)	χ (cm)	ε_e (‰)	M_s (Mp · m)	Q_s (Mp)	q_l (Mp)
0,25	22,8	0,44	18,24	3,10	12,74
0,50	25,3	0,85	34,62	5,87	24,15
0,75	27,6	1,23	49,71	8,45	34,70
1,00	28,8	1,60	64,36	10,90	44,80
1,50	28,8	2,40	80,30	13,55	56,10

Die Abhängigkeiten der Stahldehnung ε_e sowie des Biegemomentes M_s von den max. Betonstauchungen ε_b im Querschnitt s-s sind in Bild 63 aufgetragen.

Berechnung der Torsionssteifigkeit GI_t des Querschnitts s-s

Stadium I (ungerissener Querschnitt)

$$E_o = \frac{\lambda}{\varepsilon_{bs}} \beta_{RT} \quad , \quad \beta_{RT} = 227 \text{ Kp/cm}^2$$

$$\text{zugehörige } \beta_w = \frac{227}{0,85} = 267 \text{ Kp/cm}^2$$

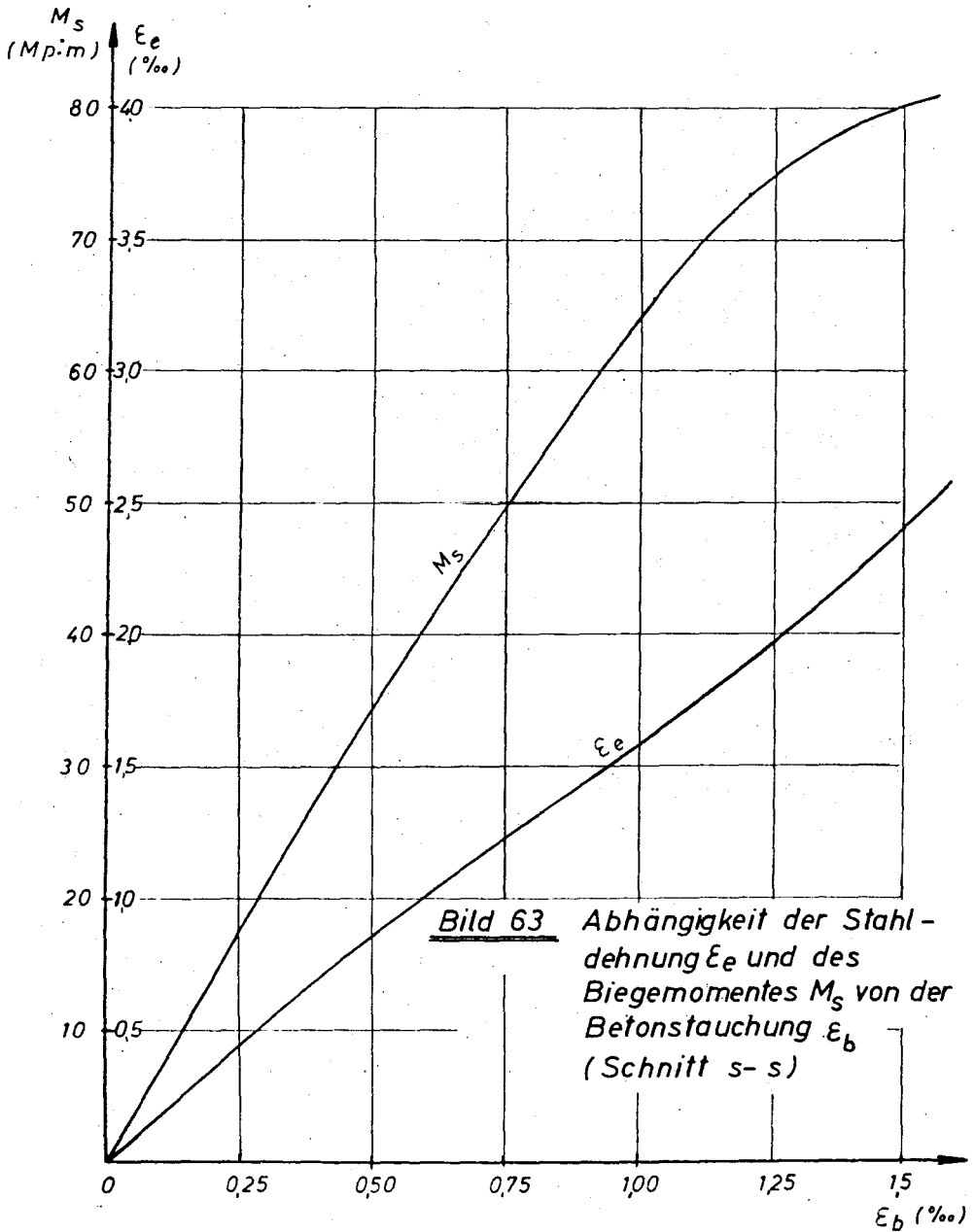
$$\lambda = \frac{2000}{100 + 267} = 5,46$$

$$\varepsilon_{bs} = 5,0 - \frac{267}{400} = 4,33 \text{ ‰}$$

$$E_o = \frac{5,46}{4,33 \cdot 10^{-3}} \cdot 227 = 286000 \text{ Kp/cm}^2$$

$$G_o = \frac{286000}{2(1+1/6)} = 122500 \text{ Kp/cm}^2$$

$$(GI_t)_o = 122500 \cdot 74000 = 9050 \cdot 10^6 \text{ Kp/cm}^2 = 905 \text{ Mp m}^2$$



Stadium II (gerissener Querschnitt)

$(GI_t)_{\text{Beton}}$ ist nach der erweiterten Form der Gl. (164) zu bestimmen.

$$(GI_t)_{\text{Beton}} = (J_{t_1} + \alpha D^4) G_1 + J_{t_2} G_2 \quad (\text{Bild 64}).$$

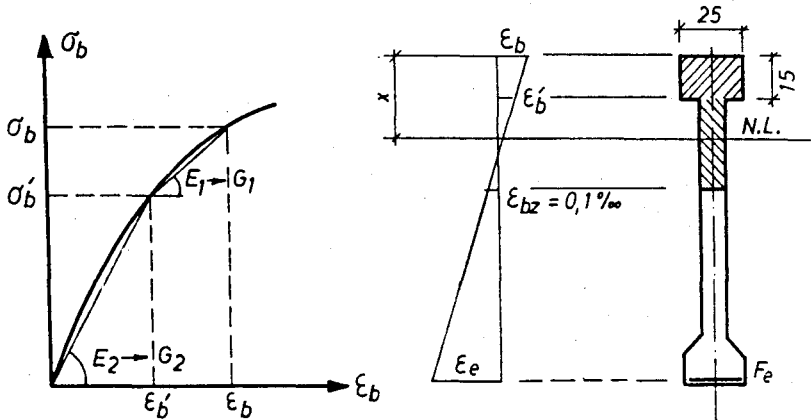


Bild 64

Der Einfluss der Bewehrung auf die Torsionssteifigkeit kann durch Gl. (168) berücksichtigt werden.

Für verschiedene ϵ_b -Werte werden die Torsionssteifigkeiten GI_t berechnet; die Ergebnisse sind in Tafel XXX wiedergegeben.

T a f e l X X X

ϵ_b (°/oo)	M_s (Mp·m)	Q_s (Mp)	q_l (Mp)	$G I_t$ (Mp · m ²)		
				$(GI_t)_{Bet.}$	$(GI_t)_{Bew.}$	$(GI_t)_{Ges.}$
-	-	-	-	905	-	905
0,25	18,25	3,10	12,74	328	17	345
0,50	34,62	5,87	24,15	250	17	267
0,75	49,71	8,45	34,70	207	17	224
1,00	64,36	10,90	44,80	173	17	190
1,50	80,30	13,65	56,10	112	17	129

Die Abhängigkeit der Torsionssteifigkeit GI_t von der Belastung q_l ist in Bild 65 dargestellt.

Berechnung der Ersatzsteifigkeiten nach Gl. (173) und (174) :

$$(EI_y)_o = 1336 \text{ Mp } m^2$$

$$(GI_t)_o = 905 \text{ Mp } m^2$$

$(EI_y)_{min}$ und $(GI_t)_{min}$ sind den Tafeln XXVIII und XXX in Abhängigkeit von der Belastung zu entnehmen. Die Ersatzsteifigkeiten sind in Bild 66 dargestellt.

Bestimmung der Kipplast

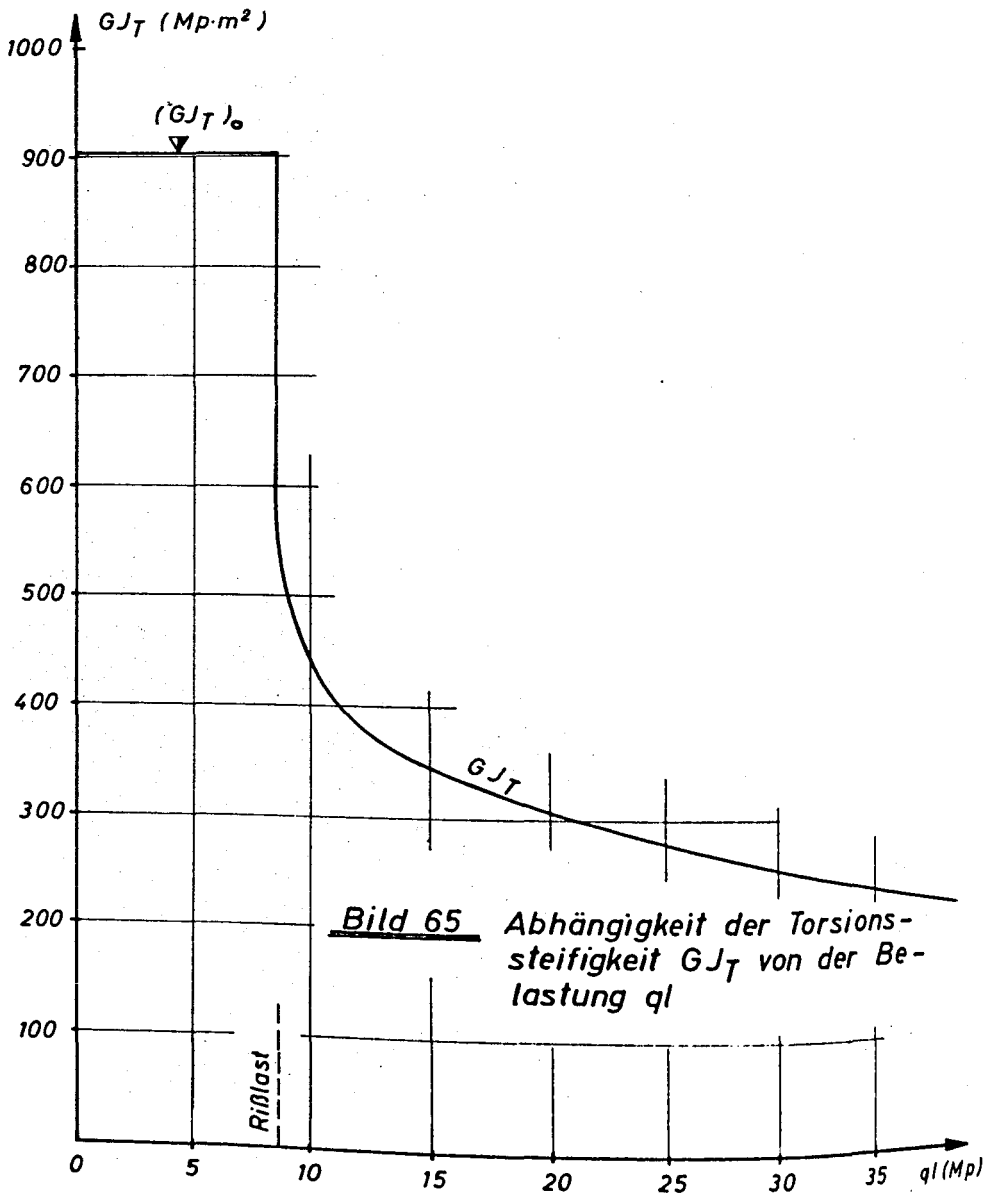
Die Kipplast ist aus Gl. (38) zu bestimmen.

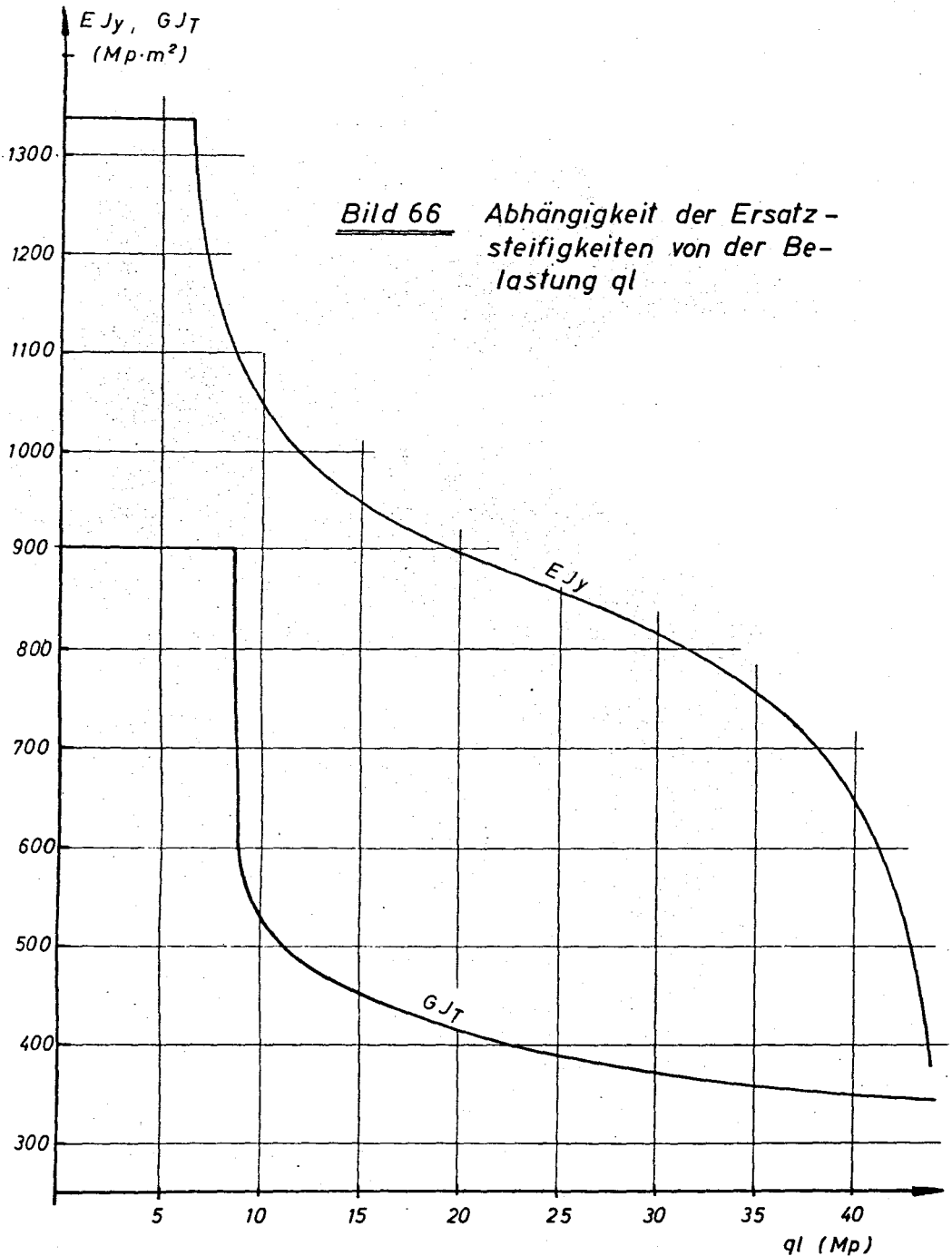
Für den vorliegenden Fall gilt

$$e = 0 \text{ (Eigengewicht in Schwerpunkt) ,}$$

$$C_M = 0 \text{ (vernachlässigt) .}$$

Zunächst werden r_x und y_M gleich Null angesetzt. Wie später gezeigt wird, ist diese Annahme gerechtfertigt.





Die Kippgleichung (38) wird dann

$$(q_k l^3)^2 + 6,97 \frac{l}{f} GJ_t (q l^3) - 837 GJ_t EJ_y = 0$$

Die Aufhängenhöhe beträgt $f = 0,60$ (Bild 67).

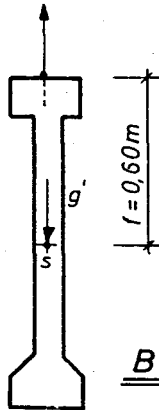


Bild 67

Die Lösung der obigen Gleichung nach $(q l^3)$ erfolgt durch Probieren mit Hilfe des Bildes 66.

Zunächst wird die Kipplast $q_k l$ zu 18,6 Mp abgeschätzt. Aus Bild 65 entnimmt man die zugehörigen Steifigkeiten.

$$EI_y = 910 \text{ Mp m}^2$$

$$GI_t = 425 \text{ Mp m}^2$$

Setzt man diese in Kippgleichung ein, so erhält man daraus

$$q_k l = 18,6 \text{ Mp wie geschätzt.}$$

$$\underset{\text{vorh.}}{(q l)} = (\underset{\text{vorh.}}{g' l}) = 0,41 \cdot 15 = 6,15 \text{ Mp.}$$

Vorhandene Sicherheitszahl gegen Auskippen während der Montage

$$\nu_{k, \text{ vorh.}} = \frac{(q l)_k}{(q l)_{\text{ vorh.}}} = \frac{18,6}{6,15} = 3,03$$

Erforderliche Sicherheitszahl $\nu_{\text{ erf.}} = 2,50$

$$\nu_{k, \text{ vorh.}} = 3,03 > \nu_{\text{ erf.}} = 2,50$$

Bei der Last $q_l = 18,6 \text{ Mp}$, lassen sich r_x aus Gl. (175) und y_M nach Abschn. 7.234 angeben

$$r_x = -0,005 \text{ m} \quad , \quad y_M = 0,50 \text{ m}.$$

Als Kipplast erhält man unter Berücksichtigung von r_x und y_M

$$(q_l)_k = 19,0 \text{ Mp}.$$

Der Unterschied beträgt

$$\frac{19,0 - 18,6}{19,0} \cdot 100 = 2,1 \%$$

Nun soll die Kipplast nach Gl. (43) bestimmt werden.

$$(q_l)_k = 120 \frac{f}{l^3} EJ_y$$

Für den vorliegenden Binder

$$(q_l)_k = 120 \frac{0,6}{15^3} EI_y = 0,0214 EI_y$$

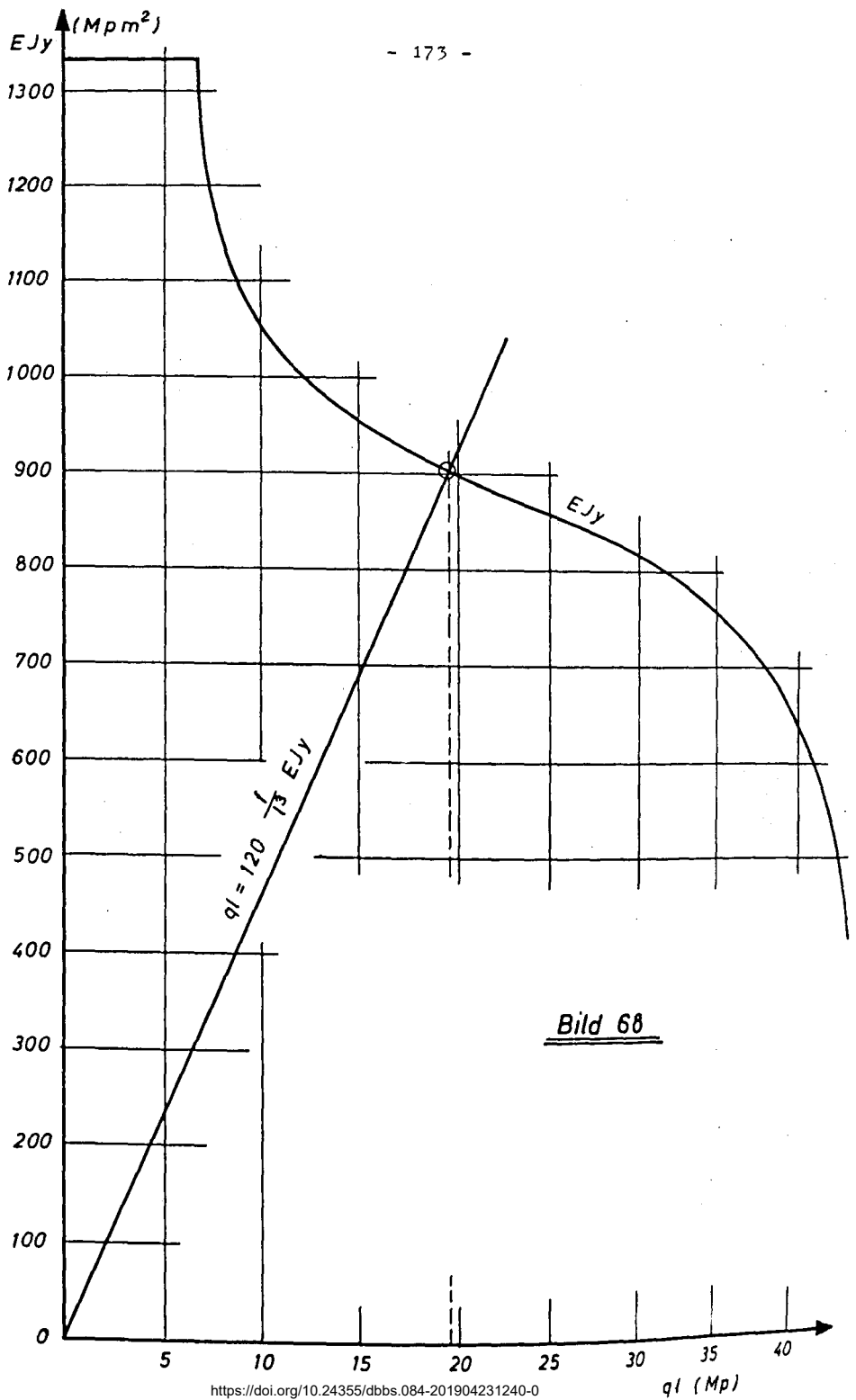
Diese Beziehung ist in Bild b8 mit einer Geraden dargestellt. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Biegesteifigkeitslinie ergibt sofort die gesuchte Kipplast, und zwar

$$(q_l)_k = 19,40 \text{ Mp}.$$

Der Unterschied zwischen diesem Fall ($GI_t = \infty$) und dem mit der tatsächlichen Torsionssteifigkeitsgrösse beträgt

$$\frac{19,40 - 18,60}{18,60} \cdot 100 = 4,3 \%$$

Diese Überlegungen gelten nur für dickwandige Querschnitte mit kleinen Aufhängehöhen f (bis $f/l \approx 0,05$).



Bruchsicherheit gegen Biegung (Querschnitt m-m)

Dem Bruchsicherheitsnachweis werden die in Bild 22 dargestellte

$\sigma_b - \varepsilon_b$ -Linie für Beton und die idealisierte $\sigma - \varepsilon$ -Linie für Stahl zugrunde gelegt.

$$\beta_R = 0,7 \beta_{w,5\%} = 0,70 (300 - 50) = 175 \text{ p/cm}^2$$

$$\beta_S = 4200 \text{ Kp/cm}^2$$

Das Bruchmoment ergibt sich bei Versagen der Stahleinlagen zu

$$M_{m,u} = 79,82 \text{ Mpm.}$$

$$(q_l)_{m,u} = 79,82 \cdot \frac{8}{15} = 42,5 \text{ Mp}$$

$$(g_l)_{\text{vorh.}} = 0,41 \cdot 15 = 6,16 \text{ Mp (unter Bindereigengewicht)}$$

$$(q_l)_{\text{vorh.}} = 1,40 \cdot 15 = 21,0 \text{ Mp (unter Gebrauchslast)}$$

Sicherheit gegen Biegebruch im Querschnitt m-m

unter Bindereigengewicht

$$\gamma_{s,u} = \frac{42,5}{6,15} = 6,92 > \gamma_{\text{erf.}} = 1,75$$

unter Gebrauchslast

$$\gamma_{s,u} = \frac{42,5}{21,0} = 2,03 > \gamma_{\text{erf.}} = 1,75$$

Bruchsicherheit gegen Schub (Querschnitt s-s)

$$\beta_{R\tau} = \psi \beta_R = 0,89 \cdot 175 = 155 \text{ Kp/cm}^2$$

$$\beta_S = 4200 \text{ Kp/cm}^2$$

Das Schubbruchmoment ergibt sich bei Versagen der Stahleinlagen

$$\text{zu } M_{s,u} = 79,32 \text{ Mpm.}$$

$$Q_{s,u} = 13,45 \text{ Mp}$$

$$(q_l)_{s,u} = 55,3 \text{ Mp}$$

Sicherheit gegen Schubbruch in Querschnitt s-s:

unter Bindereigengewicht

$$\gamma_{s,u} = \frac{55,3}{6,15} = 9,00 > \gamma_{\text{erf.}} = 1,75$$

unter Gebrauchslast

$$\gamma_{s,u} = \frac{55,3}{21,0} = 2,63 > \gamma_{\text{erf.}} = 1,75$$

Zusammenstellung der Sicherheitszahlen unter Bindereigengewicht

T a f e l XXXI

Bruchart	Kippen	Biegebruch	Schubbruch
\surd	3,03	6,92	9,00

Berechnung der Kipplast nach dem Verfahren von PETERSSON

B 300

$\bar{E} = 105000 \text{ Kp/cm}^2$ (aus Tafel XIV)

$\bar{G} = \frac{105000}{2} = 52500 \text{ Kp/cm}^2$

$J_{y_0} = 44540 \text{ cm}^4$
 $J_{t_0} = 74000 \text{ cm}^4$

} Gesamtbetonquerschnitt

$\bar{E} \bar{J}_y = 468 \text{ Mpm}^2$

$\bar{G} \bar{J}_t = 385 \text{ Mpm}^2$

Mit $l = 15 \text{ m}$ und $f = 0,60 \text{ m}$ erhält man aus

$$(ql^3)^2 + 6,97 \frac{15}{0,6} 385 (ql^3) - 837 \cdot 385 \cdot 486 = 0$$

die Kipplast zu $(ql)_k = 9,77 \text{ Mp}$

$$\surd_k = \frac{9,77}{6,15} = 1,59 < \surd_{af} = 3 \text{ (nach seinen Empfehl.)}$$

D.h., die Sicherheit gegen Kippen ist nach PETERSSON nicht ausreichend.

Berechnung der Kipplast nach dem Verfahren von HANSELL/WINTER:

Demnach schreibt man (Bild 69) :

$$\begin{aligned}
 I_y &= \frac{15 \cdot 25^3}{12} + \frac{(x - 15)}{12} \cdot 10^3 \\
 &= 19500 + \frac{x - 15}{12} \cdot 10^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_t &= 25 \cdot 15^3 \left(\frac{1}{3} - 0,21 \frac{15}{25} \right) \\
 &+ \frac{10}{15} (0,15 + 0) \\
 &+ (x - 15) \cdot 10^3 \left(\frac{1}{3} - 0,105 \frac{10}{x - 15} \right) \\
 &= 22600 + (x - 15) \left(\frac{1}{3} - \frac{1,05}{x - 15} \right) 10^3
 \end{aligned}$$

Für verschiedene x -Werte werden I_y und I_t ausgewertet. Die der x -werte zugehörigen ϵ_b sind der Tafel XXVII zu entnehmen; und mit Hilfe der σ - ϵ -Linie des Betons werden die Sekantenmoduln bestimmt. Somit können die Steifigkeiten berechnet werden. Durch Probieren erhält man aus der Kippgleichung die gesuchte Kipplast, und zwar

$$(q_l)_k = \underline{12,00 \text{ Mp}}$$

Die nach dem genauen Verfahren berechnete Kipplast wird in Tafel XXII mit der nach den Näherungsverfahren verglichen.

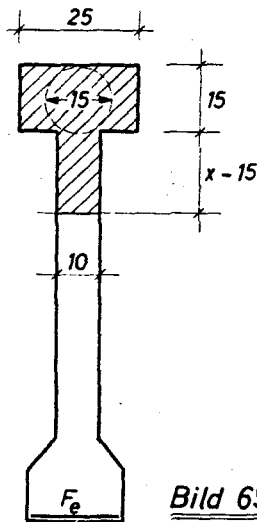


Bild 69

T a f e l XXXII

Kritische Last	Verfasser	PETTERSSON	HANSELL/WINTER
$(q_l)_k$ in M_p	18,60	9,77	12,00

Es lässt sich erkennen, dass die Näherungsverfahren die Kipplast unterschätzen. Das liegt darin, dass der Berechnung der Biegesteifigkeit nach HANSELL/WINTER nur die Druckzone des gerissenen Querschnittes zugrunde gelegt wurde. Durch die Vernachlässigung der unterhalb der Nulllinie liegenden Zone wird die tatsächliche Biegesteifigkeit stark herabgesetzt.

.....

repro + druck, 33 braunschweig, postfach 437, ruf 22132